

O A M C / C A B I L D O D E T E N E R I F E

ERES

S E R I E D E A R Q U E O L O G I A

S U M A R I O

V O L U M E N 3 - N ° 1 - J U N I O 1 9 9 2

Los cimientos sociales de los Caciques
Tainos: William Keegan / Analisi
grafico-simbolica di tre *pintaderas*
italiane: Massimo Dall'Agnola / Hallaz-
go arqueologico en Las Cañadas del

Teide: José Juan Jiménez González /
Los grabados de "La Pedrera", Tenerife:
José Perera López / Los conjuntos
borrosos. Una introducción:
Marcos M. Rodríguez Pestana



M U S E O A R Q U E O L O G I C O Y E T N O G R A F I C O

COMITE EDITORIAL

Director:
RAFAEL GONZÁLEZ ANTÓN

Secretario
JOSÉ JUAN JIMÉNEZ GONZÁLEZ

Consejo Editorial

EDUARDO AZNAR VALLEJO CARMEN DÍAZ ALAYÓN
DIMAS MARTÍN SOCAS CONRADO RODRÍGUEZ MARTÍN
ANTONIO TEJERA GÁSPAR

Consejo Asesor

RODRIGO DE BALBÍN BEHRMANN
(Univ. de Alcalá de Henares) MANUEL GARCÍA SÁNCHEZ
(Univ. de Granada)

CELSO MARTÍN DE GUZMÁN
(Univ. Complutense, Madrid) JOAQUÍN MECO CABRERA
(Univ. de Las Palmas de Gran Canaria)

SUSCRIPCIONES

Precio de cada número: 1.500 Ptas.
Extranjero: 2.000 Ptas.

© OAMC / Cabildo de Tenerife

*Fotomecánica, composición e impresión:
El Productor S. L. Técnicas Gráficas*
Barrio Nuevo de Ofra, 12. 38320 La Cuesta. Tenerife
ISSN 1130-6572
Depósito Legal TF 1754/90

MANUSCRITOS Y CORRESPONDENCIA

Los manuscritos enviados para su publicación deberán ser originales, a menos que hayan sido solicitados expresamente por el Comité Editorial. Se enviarán dos copias, a doble espacio en formato DIN A4. Las notas, con numeración árabe, se adjuntarán, en hoja aparte, al final del texto y antes de la bibliografía. Las referencias bibliográficas, que deberán contener todos los datos pertinentes para su localización, se listarán al final por orden alfabético, y sus citas en el texto deberán figurar entre paréntesis con indicación de la página. Ej. (Malinowki 1922: 45). Los originales pueden también remitirse mediante soporte magnético en «diskettes» para IBM PC, AT o compatibles, en formato ASCII o Wordperfect.

Se incluirá, asimismo, un Resumen con un máximo de 150 palabras, al que seguirá una lista de cinco palabras-clave que definan el contenido del texto.

Las recensiones de libros han de ser enviadas, asimismo, a doble espacio en formato DIN A4, y tendrán una extensión máxima de cinco páginas.

Para una más detallada información sobre estilo y características de los originales, ponerte en contacto con el Secretario del Comité Editorial, cuya dirección es la siguiente:

JOSÉ JUAN JIMÉNEZ GONZÁLEZ
Museo Arqueológico y Etnográfico
Cabildo de Tenerife
Apartado de Correos 133
38080 Santa Cruz de Tenerife
Islas Canarias

La Secretaría de ERES-ARQUEOLOGÍA no mantendrá correspondencia de los trabajos no solicitados.

Los autores de artículos deberán adjuntar sus datos profesionales y la dirección con la que desean aparecer en el directorio de investigadores.

ERES

«Eres» es un topónimo y una voz canaria que, en un sentido genérico, significa «hoyo o poceta formado en las rocas impermeables del alvéolo de los barrancos, donde se acumula arena fina y limpia con el agua de lluvia. Cuando se quiere extraer el agua se forma un pequeño hoyo en la arena, hasta que aparece el agua; dejando sentar el cieno se aclara y, sacada la necesaria, se vuuelve a cubrir el hoyo para evitar la evaporación de la restante», tal como han recogido y analizado los investigadores J. Álvarez Delgado y D. Wölfel (ver D. J. Wölfel *Monumenta Linguae Canariae*, p. 511).

Hemos escogido este término porque creemos que resume metafóricamente el sentido de la revista, que *pretende ahondar y clarificar el acervo cultural de las islas*, a través de estudios serios y rigurosos, tanto a partir de documentos históricos, arqueológicos o etnográficos, como de la investigación puntera más actual. Para ello ha de profundizar más allá de las cosas que se contemplan a primera vista, penetrando en la realidad como lo hacían nuestros antepasados para buscar el agua necesaria para su sustento.

ÍNDICE

ANTROPOLOGÍA

WILLIAM KEEGAN, MORGAN MACLACHLAN y BRYAN BYRNE

Los cimientos sociales de los cacique antiguos 7

ARQUEOLOGÍA

MASSIMO DALL'AGNOLA

Analisi grafico-simbolica di tre *pintaderas* italiane 19

JOSÉ JUAN JIMÉNEZ GONZÁLEZ

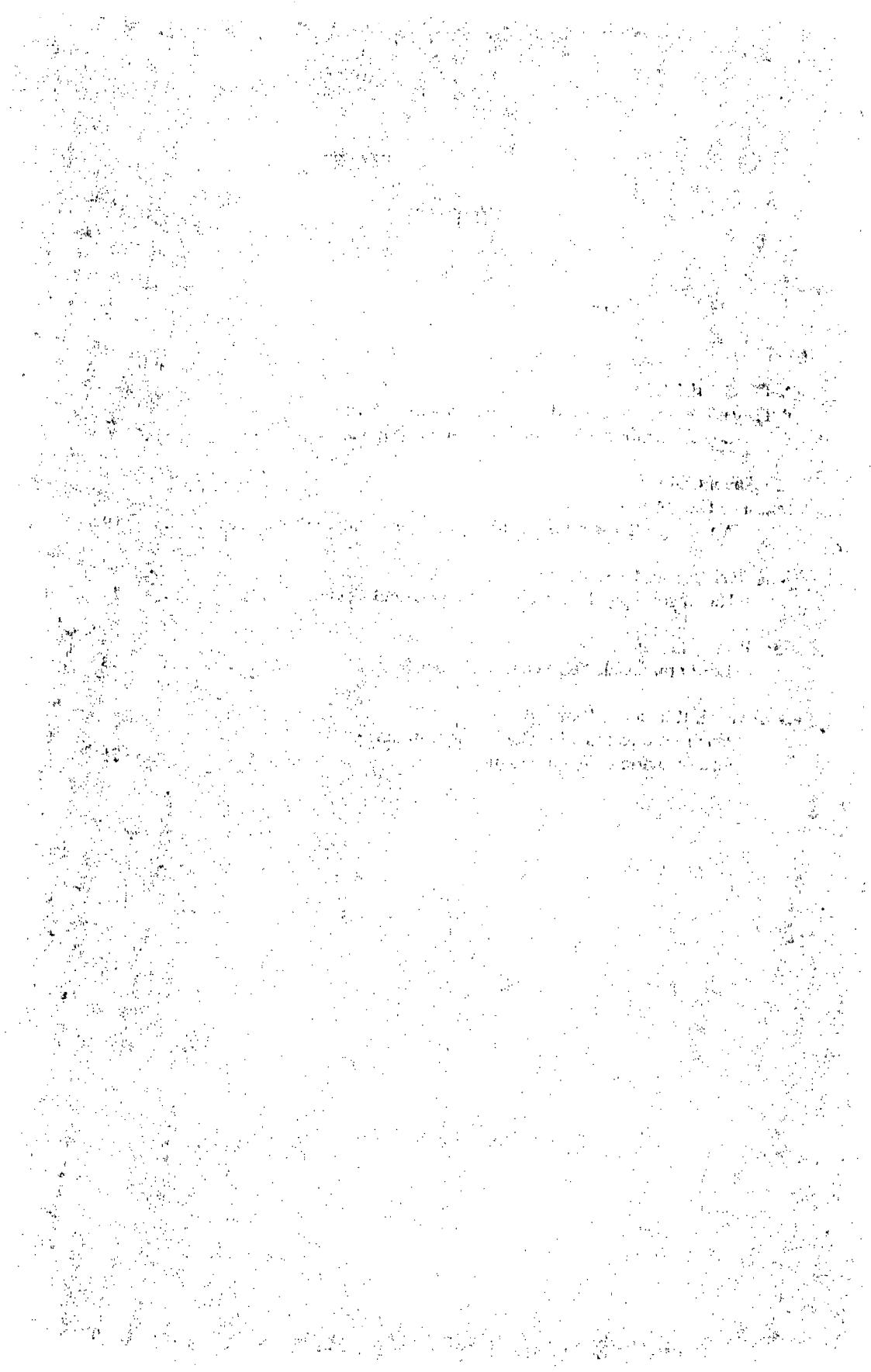
Hallazgo arqueológico en Las Cañadas del Teide 27

JOSÉ PERERA LÓPEZ

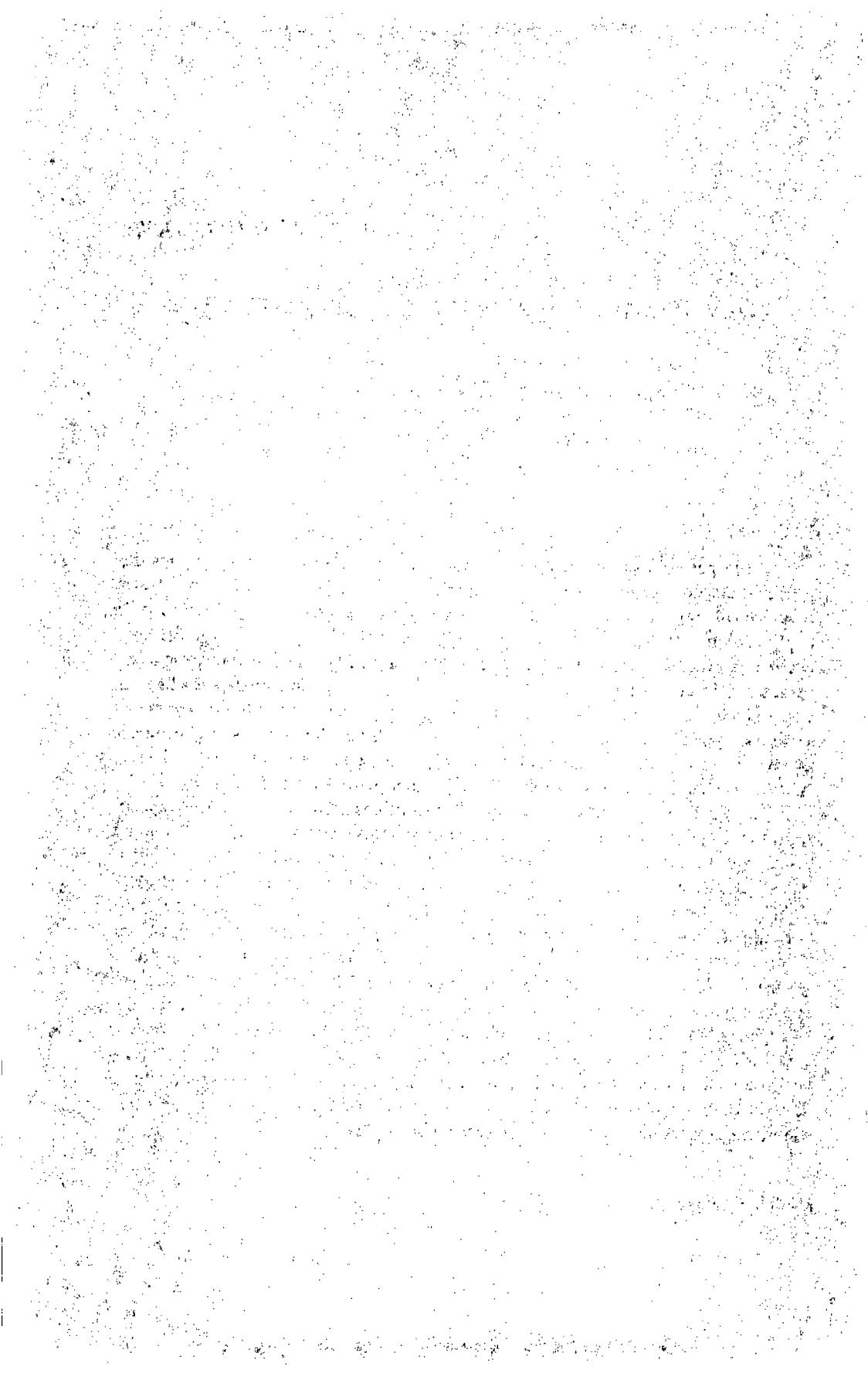
Los grabados de "La Pedrera", Tenerife 33

MARCOS M. RODRÍGUEZ PESTANA

Una introducción a los Conjuntos Borrosos y
su aplicación en Arqueología 75



ANTROPOLOGIA



LOS CIMENTOS SOCIALES DE LOS CACIQUES TAINOS

WILLIAM KEEGAN¹, MORGAN MACLACHLAN², & BRYAN BYRNE³

¹ *Museo de Historia Natural de Florida, Gainesville.*

² *Universidad de Carolina del Sur, Columbia.*

³ *Universidad de Florida, Gainesville.*

RESUMEN

Como parte de su colaboración inicial en trabajos arqueo-etnológicos, los dos primeros autores examinaron el modelo de Ember para la evolución de la residencia avunculocal con la evidencia longitudinal de tipo arqueológico y etnográfico sobre la organización social taina. Esta reconstrucción mostrando la organización social taina como una descendencia matrilineal con residencia matrilocal-avunculocal tiene diversas implicaciones para la organización y funcionamiento de aquella sociedad. En este artículo nosotros inferimos la terminología de parentesco usada por los tainos antes y después del contacto con los españoles, y luego exploramos las implicaciones de esas bases organizacionales para la emergencia de los caciques tainos. Nuestro propósito es explorar el nexo social en el cual emergieron las funciones políticas.

Los españoles que vinieron a colonizar las Antillas a finales del siglo XV encontraron sociedades que estaban fundadas sobre principios organizativos muy distintos a los de la sociedad española (Fig. 1). Esas diferencias fascinaron a los cronistas españoles quienes recogieron documentación extensiva sobre el carácter matrifocal (donde la unidad o estructura familiar es dirigida por la madre, debido a la ausencia permanente o prolongada del padre) de las sociedades tainas. Esas descripciones, aunque a veces incorrectas, proveyeron una continuidad histórica que nos permitió crear un modelo de la sociedad taina en el momento del descubrimiento y evaluar los modelos etnológicos sobre la evolución de las sociedades matrilocales/avunculocales (Keegan y Maclachlan 1989; Maclachlan y Keegan 1990). Nosotros llegamos a la conclusión de que los tainos rastreaban los vínculos de linaje a través de la mujer y residían en unidades ampliadas de tipo matrilocal o avunculocal, y que el modelo de Melvin Ember para el estudio de la evolución de la residencia avunculocal es esencialmente correcto (Ember 1974; Ember y Ember 1971).

Ese estudio original enfatizó solamente dos aspectos de la organización social: residencia y linaje; los otros aspectos de la organización política fueron dejados a un lado. Nosotros hemos continuado ese trabajo mediante el análisis de los restos arqueológicos en las Antillas en busca de la evidencia sobre los mecanismos a través de los cuales emergieron los cacicazgos avuncolocales (Keegan 1990, 1991), nuestra investigación de la literatura de diferentes culturas también continua, y Byrne (1991) ha completado recientemente una reconstrucción de la terminología de parentesco usada por los taínos.

Este artículo es un informe de los avances logrados en nuestro análisis de las ramificaciones políticas de la formación social que nosotros llamamos el cacicazgo avunculocal. Nuestro interés en este trabajo es en el contexto social dentro del cual surgieron los caciques y con las relaciones estructurales que producen las jerarquías sociales. Nuestra discusión está presentada en tres partes. Primero, discutimos brevemente el término cacicazgo tal como lo hemos usado en nuestro estudio de los taínos. En segundo lugar, examinamos con cierto detalle las características especiales de los cacicazgos avunculocales. Finalmente, examinamos los nexos sociales de donde los caciques avunculocales, así como su aristocracia, emergieron entre los taínos.

CACICAZGOS

Nuestra definición de los cacicazgos ha seguido el trabajo de Timothy Earle (1978, 1987) y Allen Johnson (Johnson y Earle 1987) quienes definen los cacicazgos como organizaciones políticas integradas regionalmente en las cuales los intereses de una población dependiente son equilibrados contra los intereses de una aristocracia emergente (Earle 1987:297). Las descripciones españolas sobre la sociedad taína dejan poca duda sobre el hecho de que los taínos en Puerto Rico, la Española, y el Este de Cuba eran complejos cacicazgos en el momento del contacto con los europeos (Wilson 1990; Keegan 1991; Byrne 1991). Además, la arqueología de las Bahamas, Jamaica, Cuba central, y posiblemente las Islas Leeward indica que las poblaciones en esas islas estaban dentro de la esfera política taína y estaban caracterizadas como cacicazgos simples (Keegan y MacLachlan 1989; Allaire 1987).

Earle (1987:291) informa que casi todos los esfuerzos hechos para explicar el surgimiento de los cacicazgos han enfatizado la importancia de las relaciones económicas. Esas relaciones son caracterizadas como administrativas, en cuyo caso el cacique organiza y maneja los aspectos de la economía; o como de control, en cuyo caso hay un acceso diferencial a los recursos productivos y/o al intercambio de riqueza. Johnson y Earle (1987) han mostrado que esas jerárquicas relaciones de producción deberían ser vistas como conductas complementarias incluidas dentro del rol económico de los caciques.

Nosotros vemos la dicotomía de "administración" y "control" presentada por Earle como una muestra de los mecanismos usados para lograr el objetivo básico en las economías propias de los cacicazgos. Nosotros definimos ese objetivo como el de crecimiento económico en condiciones de decrecientes ganancias marginales respecto de la producción. Los cacicazgos surgieron de las economías de subsistencia. El objetivo

económico de la producción de subsistencia es usualmente asumido como la satisfacción de las necesidades o deseos mediante el uso de una estrategia basada en la minimización de los costos (Johnson y Earle 1987). Sin embargo, para que una estrategia de minimización de los costos sea efectiva algún otro aspecto de la economía debe ser satisfecho, optimizado, o maximizado. Llevada hasta el extremo, la minimización de los costos termina con la muerte de quienes la practican, como en el caso de los Shakers. Nosotros creemos que el objetivo central en las economías de subsistencia es la producción de hijos; ese es un objetivo que no sorprende si se toma en cuenta que la mano de obra es su restricción más importante.

Resumiendo, nosotros vemos los cacicazgos como organizaciones políticas organizadas jerárquicamente y fundadas sobre las bases de parentesco, las cuales son organizadas para promover el crecimiento económico. El crecimiento económico ocurre a través del reclutamientos de nuevos miembros, sea mediante la inmigración o la procreación. En cierto sentido los cacicazgos pueden ser comparados con un esquema de Ponzi o con una pirámide invertida. El costo de membresía no es alto, y todos se benefician siempre que el crecimiento continúe. Sin embargo, cuando el crecimiento se detiene, la pirámide se derrumba bajo su propio peso.

Esa descripción caracteriza el sistema de finanzas que es usualmente llamado "redistribución" (Earle 1987). La producción de subsistencia de cada hogar es autónoma y debe ser suficiente para satisfacer las necesidades domésticas. Para asegurar que las necesidades son satisfechas, la unidad familiar de alguna manera produce un poco más de lo que realmente necesita. Cuando emerge un individuo con la capacidad de mobilizar la producción excedente de los hogares individuales, también emerge la oportunidad de acción política. No disponemos del tiempo necesario para discutir aquí la manera en la que la producción adicional de los hogares individuales es apropiada. Si podemos decir que esa apropiación ocurre a través de la manipulación de los lazos de parentesco.

CACICAZGOS AVUNCULOCALES

Al definir los cacicazgos como economías de crecimiento en una escala regional, las cuales están organizadas por los principios del parentesco, nosotros hemos identificado el parentesco, y de manera más general la organización social, como el elemento clave en el surgimiento de los caciques. Nuestra posición es que uno no puede entender la formación política llamada cacicazgo sin entender primero los cimientos sociales en que están incrustadas sus economías políticas.

Nosotros creemos que los cacicazgos avunculociales son interesantes por tres razones. Primero, son raros en términos comparativos, sin embargo se desarrollaron en una serie de áreas muy separadas y de tamaño limitado, con un increíble grado de similaridad. Así, es un tema de interés teórico entender por qué este inusual y complejo patrón de organización de parentesco fue alcanzado por distintas y desvinculadas poblaciones. En segundo lugar, nosotros creemos que la sociedad taina es una muestra de los grupos de sociedades en las cuales se dieron las condiciones favoreciendo el cacicazgo avunculocal, aunque por mucho tiempo los estudiosos han fallado en reco-

nocer este hecho. Tercero, los cacicazgos avunculocales sirven como un vehículo excelente para ilustrar las formas en que las relaciones económicas y la organización social se desarrollan concertadamente.

La noción de primacía infraestructural que destaca la perspectiva del materialismo cultural usada por nosotros para tratar estos asuntos es frecuentemente malinterpretada como un materialismo mecanicista en el cual un grupo determinado de condiciones materiales son vistas conduciendo inevitablemente hacia similares organizaciones sociales e ideologías. De hecho, la primacía atribuida a la determinación infraestructural sugiere que la estabilidad infraestructural promueve la estabilidad social, mientras que el cambio infraestructural regula el cambio social con el carácter del cambio reflejando los patrones culturales prevalecientes. Así, no es sorprendente hallar cacicazgos con parentesco de consanguinidad, matrilineal y patrilineal, y diversos patrones de residencia marital. La pregunta es ¿por qué durante su desarrollo las sociedades siguen una ruta en lugar de otra en respuesta a un cambio infraestructural comparable? Parte de la respuesta está en la organización social antecedente sobre la cual el cambio infraestructural va a operar. Por ejemplo, el modelo de Doug Sutton (1987) para el desarrollo de los cacicazgos Maories y nuestro modelo para el caso taíno tienen mucho en común, aun cuando el primero es un clan cónico y patrilineal mientras que el último es matrilineal y avunculocal.

La idea de que el cambio social infraestructuralmente dirigido en una sociedad es mediado por la estructura precedente es ilustrado por los argumentos de Ember citados por Keegan y MacLachlan. Ellos sugieren que la residencia matrilocal y el subsecuente desarrollo de la matrilinealidad surgen de las guerras externas. Con los hombres ausentes la mayor parte del tiempo, las mujeres se ven obligadas a depender fuertemente una de la otra y el resultado es el de los hogares ampliados centrados en grupos de mujeres relacionadas entre sí. La guerra interna y la fuerte dependencia en la mano de obra masculina, en contraste, favorecen la residencia patrilocal. La residencia avunculocal es vista como una respuesta a la guerra interna surgida en una sociedad que previamente era matrilocal y matrifocal, mientras los hombres poderosos (*big men*) agrupaban a su alrededor sus compañeros de clan para formar hogares ampliados compuestos por hombres relacionados entre sí.

Este argumento parecería implicar una incompatibilidad entre la residencia matrilocal y la competencia entre los hombres por el control de los recursos locales. No es difícil de ver por qué eso puede ocurrir. Divale (1984) ha visto la matrilocalidad y la guerra externa como elementos de una estrategia migratoria expansionista, tal como ocurre en el caso de los pueblos de habla Bantu en África o el asentamiento de las cadenas isleñas en las Antillas. La familia matrifocal también es análoga a un patrón de agricultura de baja intensidad dependiente de la mano de obra femenina acompañado por la caza y la pesca practicadas por los hombres en grandes áreas. Es también posible que los hombres ausentes y las relativamente altas tasas de divorcio típicas de las sociedades matrilocales inhiban el crecimiento poblacional. En todo caso, el patrón matrilocal parece conveniente para una sociedad que puede responder a la presión de los recursos locales de subsistencia a consecuencia de la migración o

de la expansión de las áreas de recolección. Este patrón de residencia no es, sin embargo, conveniente para la intensificación de la mano de obra en la agricultura o para el aumento de la densidad poblacional. Esto es así, en primer lugar, debido a que la intensificación del esfuerzo requiere la mano de obra de los hombres previamente ausentes, y en segundo lugar, porque la presión poblacional sobre los recursos locales adecuados para la producción intensificada crea conflictos internos.

Aquí nosotros vemos con bastante claridad la mediación estructural de procesos guiados infraestructuralmente. Cuando las condiciones infraestructurales convenientes para el surgimiento de los hombres poderosos (*big men*) y luego los caciques aparecen en una sociedad que era previamente patrilocal, no ocurre ningún cambio en la residencia marital debido a que el patrón existente es compatible con las nuevas realidades políticas y económicas. En el caso matrilocal, el patrón existente impide al supuesto empresario masculino tener acceso tanto a un grupo doméstico de parientes masculinos como a la base de recursos que él necesita para promover sus intereses. Algo tiene que cambiar.

Mucho de lo que hemos dicho hasta ahora es una repetición de nuestro trabajo previo. Lo que falta por agregar ahora son las observaciones relacionadas con lo que los caciques hacen para transformar sociedades matrilineales de crecimiento lento en sociedades con poblaciones densas y mayor productividad. Nuestras ideas sobre estos asuntos han sido grandemente influenciadas por Abraham Rosman y Paula Rubel (1989) quienes hicieron una comparación controlada del Pacífico Suroeste y de la Costa Noroeste de los Estados Unidos, muy similar a la empleada por Keegan y MacLachlan (1989) en la sociedad taína.

Rosman y Rubel llaman la atención sobre las acentuadas similitudes entre los Trobriands por un lado y la Haida y Tlingit por el otro. En ambas áreas existe una aristocracia de caciques con avunculocidad, y descendencia matrilineal, así como una terminología de parentesco Crow y matrimonio patrilateral entre primos. Ellos además formulán la pregunta sobre cómo esas sociedades alcanzaron este estado a partir de un estado precedente, comparándolas con sus culturalmente relacionados vecinos y asumiendo que éstos pueden reflejar tanto un estado precedente que sirva de referencia como los estados transitorios en la ruta hacia un cacicazgo avunculocal. En ambas instancias la referencia implica una sociedad matrilocal que practica un directo intercambio marital, usualmente un matrimonio entre primos bilaterales, y los grados intermedios implican un crecimiento en el parentesco matrilineal, en la integración política, y en la frecuencia de la residencia avunculocal.

Rosman y Rubel describen sus comparaciones como la investigación del potencial de desarrollo en dos medioambientes opuestos. Ellos demuestran que las organizaciones socio-políticas de los Trobriands y de Haida y Tlingit son virtualmente idénticas, a pesar de las diferencias drásticas en su ecología y en su economía. Los resultados parecen socavar las teorías materialistas tradicionales que ven en la ecología y/o en la economía los más importantes factores determinantes. De acuerdo con esto, parece que los principios estructurales tienen prioridad en la evolución de la complejidad social. ¿De qué otra manera puede uno explicar la presencia de organizaciones

socio-políticas idénticas en medioambientes tan radicalmente distintos (islas árticas comparadas con islas tropicales) y entre poblaciones con economías radicalmente distintas (por ejemplo, cazadores-recolectores comparados con cultivadores agrícolas)?

Nuestra posición es que esas macro-comparaciones de la ecología y la economía pasan por alto las similitudes básicas. Nosotros preferimos reconstruir sus materiales en términos de los distintos potenciales para el crecimiento económico y demográfico en relación con sus vecinos. Lo que importa para nosotros no son las diferencias entre la agricultura de Melanesia y la forrajería de la Costa Noroeste, sino el hecho de que los cacicazgos avunculocales en ambas áreas gozaron de ventajas distintas respecto de sus vecinos debido a los recursos superiores de subsistencia y a las ubicaciones estratégicas para el comercio. Así, los más importantes rasgos infraestructurales en la transformación de sociedades matrilineales relativamente igualitarias en los cacicazgos aristocráticos avunculocales tienen menos que ver con el carácter de las tecnologías de subsistencia o con los medioambientes que con la concentración local de los recursos dentro de las regiones y los factores que rodean las oportunidades de grupos individuales.

La ocupación de las posiciones ventajosas a nivel regional deja el camino abierto para el desarrollo de las organizaciones sociales capaces de controlar los recursos y organizarlos en una forma que conduzca hacia el crecimiento económico y poblacional que consolide la posición ventajosa del grupo a nivel regional. Se debe recordar que a través de este proceso estas sociedades no están simplemente respondiendo al crecimiento independiente de su población, sino que están promoviendo activamente la producción de hijos. Al mismo tiempo, el proceso es acompañado por las crecientes diferencias en rango y privilegio dentro de la sociedad más adelantada. El hecho de que los menos adelantados sean miembros de una sociedad adelantada puede ser lo que los mantiene en un lugar (en caso de que ciertamente tengan algún otro lugar donde ir, la migración podría causar costos de oportunidad no aceptables). Es mejor ser un Trobiander o Haidiano de bajo rango que el labrador de un atolón o un cazador nómada.

CACIQUES TAINOS

Nosotros creemos que las condiciones reinantes entre los tainos eran bastante similares a las existentes en el Suroeste del Pacífico y en la Costa Noroeste. Esas similitudes son más obvias cuando se las mira a través del tiempo.

Durante la fase inicial de la colonización de las islas la población creció a una rápida, incluso exponencial, tasa al tiempo que los grupos se desplegaron rápidamente a través del territorio. Las oportunidades para que los individuos asumieran posiciones de liderazgo debieron ser muchas pero de poca duración. Hemos discutido previamente por qué creemos que esos primeros habitantes tenían descendencia matrilineal y residencia matrilocal. Dentro de esos arreglos sociales los hombres continúan ocupando los roles políticos centrales como líderes del linaje matrilineal. Como tales, los líderes masculinos debieron avanzar en un número de instancias, por ejemplo: 1) en la formación de las alianzas matrimoniales con otros parientes mater-

nos, las cuales eran necesarias para asegurar la continuidad reproductiva; 2) durante la división de unidades de asentamientos locales y el movimiento de gente entre las islas; 3) en el manejo del riesgo económico y demográfico inherente a la colonización de las islas no obstante la continuación del comercio entre las islas y las visitas; y 4) en las relaciones hostiles con los grupos Arcaicos que ya residían en por lo menos algunas de las islas. Estas y otras oportunidades para el liderazgo son de corta duración y pueden ser anuladas mediante la división y la partida de individuos insatisfechos.

Eventualmente, todas las islas llegaron a ser ocupadas con densidades poblacionales relativamente bajas. Se ha observado que en los sitios arqueológicos donde se encuentran los materiales comunes usados en las épocas pasadas (por ejemplo la alfarería pintada con blanco sobre rojo, los exóticos pendientes de piedra, y los atuendos religiosos comunes), hubo un período de desarrollo semiautónomo a una escala sub-regional. Esta fase intermedia se encuentra reflejada en la alfarería mostrando estilos regionales divergentes (Rouse 1986).

En la fase final de desarrollo previo a la invasión española, surgieron poderosos caciques regionales. El factor subyacente es la creación de una base de poder a través de la concentración a nivel local de los hombres que previamente fueron dispersados al momento del matrimonio. La concentración a nivel local de los hombres provee una mano de obra subutilizada para la intensificación de la producción de subsistencia, una fuerza militar para la defensa y la expansión del territorio, y las expediciones organizadas para el comercio de larga distancia con el propósito de crear y mantener alianzas que son fortalecidas a través del intercambio de las mujeres en matrimonio. Bajo esas condiciones la descendencia es de importancia suprema. La sucesión entonces es institucionalizada en la formación social que nosotros llamamos el cacicazgo avunculocal.

La manera en que la aristocracia surgió y se distanció del resto de la sociedad, así como las maneras en que los roles asimétricos de matrimonio estratificaron la sociedad taína, están fuera del alcance del presente trabajo. Nosotros solamente podemos mencionar que las élites taínas clásicas en la Española parecen haber desarrollado un arreglo de matrimonio tipo Crow en el cual las esposas eran intercambiadas entre los cinco cacicazgos supremos. Si ese era el caso, se explicaría entonces las relaciones aparentemente pacíficas entre los cacicazgos en el momento del contacto, y quedaría reflejada una clara separación entre la gente común y la élite.

CONCLUSIONES

Nuestras investigaciones de los cacicazgos avunculociales continúan tanto en el terreno etnográfico como en la arqueológica. Por el momento ofrecemos tres conclusiones.

Primero, los cacicazgos emergen en sociedades que experimentan crecimiento económico y demográfico bajo condiciones de utilidades marginales decrecientes respecto de la producción. Las formas específicas en que esas sociedades se desarrollan depende de la manera en que la producción y la reproducción se desarrollan dentro de

la matriz social. Alternativamente, la matriz social cambia de acuerdo con la cambiante infraestructura. Mientras que los estudios de los cacicazgos tienden a enfatizar la importancia relativa del "control" o "manejo" por parte de los caciques, nosotros creemos que un mayor énfasis debería ponerse en la identificación de las relaciones sociales de producción y reproducción que ofrecen estructura a la economía política. En suma, explicar el surgimiento de un cacicazgo implica conocer la organización social precedente. No es suficiente simplemente nombrar los mecanismos (por ejemplo, guerra, comercio, etc.) porque éstos tienen efectos distintos dependiendo de la formación social a través de la cual son expresados.

Segundo, tal como Rosman y Rubel (1989) han mostrado, el medioambiente y la macroeconomía no son variables determinantes en la emergencia de los cacicazgos. Para ellos, la organización social es el factor crucial. Aunque reconocemos la importancia de su trabajo nosotros consideramos que las relaciones con los grupos vecinos es el factor clave. Así, la organización de los grupos vecinos y las relaciones intergrupales también deben ser definidas.

Finalmente, la base para hacer comparaciones entre distintas culturas debe ser cuidadosamente considerada, especialmente en el caso de los arqueólogos. Los esfuerzos para entender la prehistoria de las Antillas han investigado repetidamente la mucho más rica literatura etnográfica de las Islas del Pacífico como fuente de inspiración en relación con el ascenso de los taínos (Watters 1982; Rouse 1986). Sin embargo nuestras investigaciones, así como las de Rosman y Rubel, indican que las comparaciones podrían ser más apropiadas con relación a los forrajeros de la Costa Noroeste, los productores agrícolas de África Central, e incluso las sociedades Gé del interior cerrado Brasileño (Maybury-Lewis 1989).

BIBLIOGRAFÍA

- Allaire, Louis. 1987. Some comments on the ethnic identity of the Taino-Carib frontier. In *Ethnicity and Culture*, R. Auger, M.F. Glass, S. MacEachern, and P.H. McCartney (eds.), pp. 127-133. Calgary: University of Calgary.
- Byrne, Bryan. 1991. Toward the integration of kinship terminology theory into ethnoarchaeological middle-range research. Unpublished manuscript in possession of the author.
- Divale, William. 1984. *Matrilocal residence in pre-literate society*. Ann Arbor: UMI Research Press.
- Earle, Timothy K. 1978. *Economic and social organization of a complex chiefdom: the Halelea District, Kauai, Hawaii*. Museum of Anthropology, University of Michigan Anthropological Research Paper 63, Ann Arbor.
- Earle, Timothy K. 1987. Chiefdoms in archaeological and ethnohistorical perspective. *Annual Review of Anthropology* 16:279-308.
- Ember, Melvin. 1971. The conditions that may favor avunculocal residence. *Behavior Science Review* 9:203-209.
- Ember, Melvin and Carol Ember. 1974. The conditions that favor matrilocal versus patrilocal residence. *American Anthropologist* 73:571-594.

- Johnson, Allen and Timothy K. Earle. 1987. *The evolution of human society: from forager group to agrarian state*. Stanford: Stanford University Press.
- Keegan, William F. 1990. Caribbean chiefdoms in the late fifteenth century: Bahamas to Cuba. Paper presented at the conference "Non-imperial polities in the lands visited by Christopher Columbus during his four voyages to the New World," Panama: Smithsonian Tropical Research Institute.
- Keegan, William F. 1991. An anthropological evaluation of taino kinship. Proceedings of the 13th International Congress for Caribbean Archaeology, E.N. Ayubi and J. B. Haviser (eds.), pp. 437-445. *Reports of the Archaeological-Anthropological Institute of the Netherlands Antilles*, No. 9, Curaçao.
- Keegan, William F., Editor. 1991. *Earliest Hispanic/Native American interactions in the Caribbean: a sourcebook*. New York: Garland Press.
- Keegan, William F. and Morgan D. MacLachlan. 1989. The evolution of avunculocal chiefdoms: A reconstruction of Taino kinship and politics. *American Anthropologist* 91:613-630.
- MacLachlan, Morgan D. and William F. Keegan. 1990. Archaeology and the ethno-tyrannies. *American Anthropologist* 92:1011-1013.
- Maybury-Lewis, David. 1989. Social theory and social practice: binary systems in central Brazil. In *The attraction of opposites*, D. Maybury-Lewis and U. Almagor (eds.), pp. 97-116. Ann Arbor: University of Michigan Press.
- Rosman, Abraham and Paula Rubel. 1989. Dual organization and its developmental potential in two contrasting environments. In *The attraction of opposites*, D. Maybury-Lewis and U. Almagor (eds.), pp. 209-234. Ann Arbor: University of Michigan Press.
- Rouse, Irving. 1986. *Migrations in prehistory*. New Haven: Yale University Press.
- Watters, David R. 1982. Relating oceanography to Antillean archaeology: implications from Oceania. *Journal of New World Archaeology* 5(2):3-12.
- Wilson, Samuel M. 1990. *Hispaniola: Caribbean chiefdoms in the age of Columbus*. Tuscaloosa: University of Alabama Press.

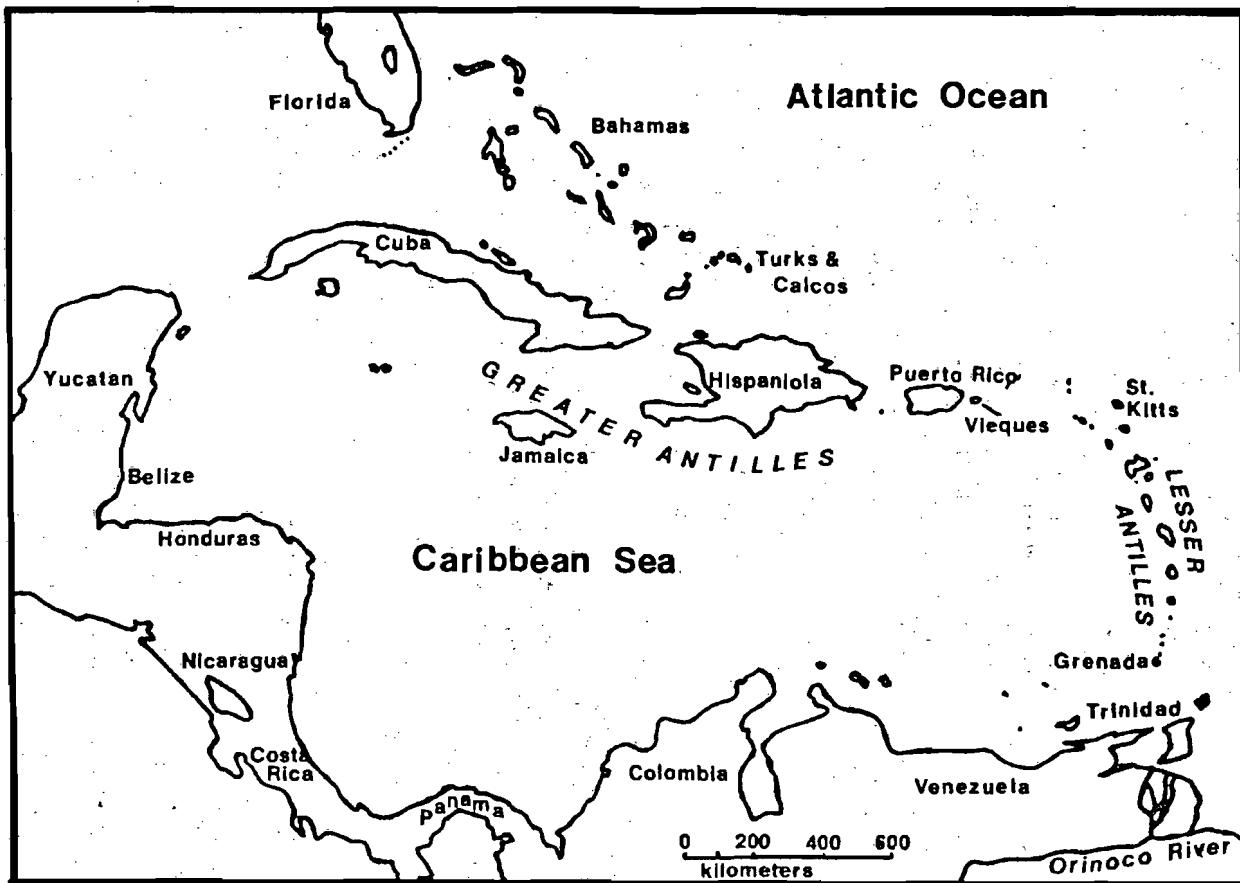


Fig. 1 Mapa del Caribe.

ARQUEOLOGIA



ANALISI GRAFICO-SIMBOLICA DI TRE *PINTADERAS* ITALIANE

MASSIMO DALL'AGNOLA

Dipartimento di Archeologia Università di Venezia

Le *pintaderas*, questi oggetti così curiosi, così strani, così anomali: però "strani" e "anomali" solo agli occhi di certi archeologi moderni, che spesso non hanno trovato il modo di collocare il ruolo di queste formelle in un'inquadramento "funzionalistico" che si accordasse coerentemente con le loro teorie precostituite. In altre parole, in un'oggetto insolito l'archeologo troppo spesso vede ciò che *gli fa comodo* vedere, perdendo così di vista ciò che l'oggetto costituisce veramente. In particolare il positivismo ottocentesco ha prodotto una visione di certi aspetti delle culture primitive legata a modelli materialistici che esistevano solo nella mente degli autori, inducendo ad immaginare il "primitivo" come una specie di pragmatista ad oltranza, del quale ogni realizzazione fosse destinata ad uno scopo e ad un uso ben precisi. Si è così negata per lungo tempo la potenzialità immaginativa del "primitivo", legata al suo particolare mondo astratto, che solo oggi comincia ad essere indagato e svelato.

Per troppo tempo non si è tenuto conto che perfino nel Paleolitico l'uomo poteva creare qualcosa di superfluo ma ai suoi occhi bello, fatto per il suo puro piacere, come ad esempio certe pitture rupestri di grande valore artistico. Anche le *pintaderas* rientrano in questa categoria, sono cioè degli oggetti a prima vista non-funzionali, che quindi (per certi antropologi del passato) l'uomo primitivo "non può" avere concepito.

Ecco perciò che si tenta in tutti i modi di dare a quei, ti reperti "strani" e "anomali" dei ruoli fantasiosi, ma funzionalistici, che si adattino perfettamente all'idea precostituita che si intende far valere. A titolo di esempio voglio riportare un brano che in questo senso è molto rappresentativo, tratto da un'opera del 1894 (G. Perrot e C. Chipiez), in cui appunto si pretende di spiegare il ruolo di due *pintaderas* come oggetti di uso domestico:

"Da una placca in terracotta, forata da tre buchi destinati a ricevere i cunei per il fissaggio al muro, si protende una parte in rilievo che funge da gancio per appendervi armi o abiti. Una piccola piramide a tre facce, dello stesso materiale, presenta la sua base punteggiata da un gran numero di piccoli buchi (Fig. I).

(...) Una serie di setole sarebbe stata fissata in ciascuno di questi piccoli buchi: è una spazzola per gli abiti!"

Gli oggetti in questione sono in realtà due *pintaderas* provenienti da scavi effettuati alcuni anni prima a Troia: come si vede, pur di rendere omaggio alla nuova religione del funzionalismo, si arriva a questi livelli assolutamente ridicoli, un attaccapanni ed una spazzola preistorici!

Non si vuole dunque riconoscere al "primitivo" la facoltà di concepire e realizzare oggetti fini a sè stessi, il cui scopo sia essenzialmente voluttuario o simbolico. Ma non si tratta di un fenomeno solo ottocentesco: questo *rifiutare l'esistenza stessa della pintadera come reperto facente parte di un determinato orizzonte culturale avviene talvolta ancor oggi*. Ne è un classico esempio la serie di scavi nella Grotta delle Gallerie (Trieste, Italia del nord-est), da cui sono emerse le tre *pintaderas* oggetto di questo studio.

Si tratta di oggetti rarissimi ed interessantissimi nel contesto del Neolitico italiano, eppure i loro scopritori non solo non le hanno ritenute degne di studio, ma addirittura nella loro relazione di scavo le menzionano distrattamente come reperti privi di alcun valore culturale, quasi come se averli scoperti sia stato un fatto irrilevante.

Anche qui siamo di fronte allo stesso comportamento ottocentesco: la *pintadera* è un reperto "scomodo" da spiegare e da giustificare, meglio ignorarla. In questo mio modesto tentativo d'interpretazione simbolica ho invece inteso dimostrare come l'approccio allo studio del simbolismo contenuto nelle *pintaderas* possa invece essere ricchissimo di spunti e di indicazioni preziose di carattere antropologico, etnologico ed archeologico. Ho voluto perciò prendere in esame queste tre singolari *pintaderas* italiane per metterle in confronto con i modelli paleocanari.

La diffusione delle *pintaderas* intorno al Bacino del Mediterraneo segue le stesse linee generali dell'espansione del Neolitico in tale area, partendo dalla Mezzaluna Fertile e suddividendosi in due principali tronconi, uno nordafricano ed uno europeo, a loro volta ramificati in direttive minori. La posizione geografica della Venezia Giulia (estremo nord-est d'Italia; prossimo al confine italo-jugoslavo) costituì sin da allora un punto di passaggio tra i Balcani e l'Asia da un lato e l'Europa centrale ed atlantica dall'altro. Attraverso questo "corridoio" giunsero non solamente manufatti e tecnologie, ma anche concetti astratti, espressi attraverso simboli geometrici, che pervadono tutto quel fenomeno chiamato comunemente "rivoluzione neolitica", dal Vicino Oriente all'Atlantico.

Le *pintaderas* furono in un certo senso uno dei *mass-media* attraverso i quali tali concetti simbolici si diffusero ovunque: prendiamo ad esempio il motivo a triangoli multipli di una celebre *pintadera* canaria, conservata al Museo Canario, e che sembra esprimere il concetto di *montagna sacra*, quindi anche di contrapposizione dialettica Mondo Terreno/Mondo Divino, Naturale/Soprannaturale, ecc. (Fig. 2) Questo motivo, caratterizzato da due serie di triangoli contrapposti, ha una simbologia che si ricollega forse al concetto di fertilità ma contemporaneamente a quello di *montagna sacra*. Infatti questi due valori simbolici appaiono a loro volta legati insieme nel mondo astratto guanche, come sembrano suggerire a Gran Canaria i siti in cui serie di

“triangoli-vulva” compaiono sulle pareti di caverne poste in posizione dominante, come ha fatto recentemente notare Julio Cuenca*.

Le “correnti di diffusione” che abbiamo sommariamente tracciato non rappresentano perciò il rilancio di un diffusionismo ormai datato, ma trovano invece rispondenza attraverso molteplici espressioni culturali, come ad esempio la decorazione della ceramica a triangoli contrapposti, comune allo Stile di Dànilo in area dalmata (AA. W., 1984) e che, oltre alla regione del Carso triestino, rivela la sua presenza in gran parte del Neolitico mediterraneo, toccando anche il Nordafrica e le Canarie e manifestandosi spesso con un bicromatismo nero-bianco, rosso-bianco o rossonero: ne conosciamo un altro significativo esempio in un vaso della cultura di Matera (Fig. 3), dove tale contrapposizione cromatica, in questo caso bianco-nera, è stata resa mediante graffito, e dove ritorna il motivo della *pintadera* canaria. Cionostante Battaglia, nelle sue brevi note inerenti lo scavo della Grotta delle Gallerie del 1913 (R. Battaglia et al., 1915), non sembra dare molta importanza alla funzione comunicativa delle *pintaderas* ivi rinvenute, benché ne ammetta la considerevole rarità. Di atteggiamento identico appare anche il succinto rapporto di successivi scavi nella stessa grotta (Cannarella et al., 1973-74), in cui parimenti tali formelle vengono liquidate in poche righe, pur riconoscendo la straordinarietà di tali rinvenimenti in territorio italiano e dunque il loro grande valore scientifico. In funzione di questa analisi grafico-simbolica inerente le tre *pintaderas* della Grotta delle Gallerie, passiamo dunque ad una breve descrizione di esse.

La *pintadera* A (Fig. 4), emersa dagli scavi del 1954-55 e dotata di manico forato, presenta un disegno a cerchi concentrici contigui, stilisticamente assimilabili alle analoghe spirali multiple presenti un po' dovunque in ambito europeo tardo-neolitico e in Età del Bronzo, simbolo sovente associato con il megalitismo mediterraneo (Malta) e atlantico (New Grange). Trattasi di segno appartenente al vasto repertorio simbolico solare, in omaggio al quale furono realizzate grandiose opere, i cui apici sono rappresentati dagli imponenti complessi tipo *cromlech* o *alignement*. Il cerchio concentrico e la spirale affondano senz'altro le loro radici nell'ambito della teologia luni-solare, e a questo proposito rimando ad altri miei interventi su questo soggetto (Dall'Agnola, 1991).

Un archeologo italiano, Legnani, afferma molto sinteticamente che “*il Neolitico Europeo è essenzialmente un processo di colonizzazione agricola derivante da zone extra-europee*” (Legnani, 1968): perciò, come ogni colonizzazione, vi fu anche un parallelo apporto di valori culturali e di complesse simbologie magico-religiose, nel cui contesto s'inserisce certamente l’“invenzione” della *pintadera*.

Un'indiretta prova dell'esistenza di un comune substrato culturale di matrice panmediterranea ci viene da un altro reperto della Grotta delle Gallerie, consistente in un vaso biconico quadriangolare decorato a motivi zig-zaganti verticali, che sembra condividere il medesimo prototipo di un'analogia forma guanche di Gran Canaria

* Comunicazione orale di J. Cuenca Sanabria al Convegno Internazionale “L'arte e l'ambiente del Sahara preistorico: dati e interpretazioni”, Milano 24-27 Ottobre 1990, in corso di pubblicazione.

(Fig. 5): è significativo rilevare in particolar modo la concordanza nell'esecuzione del bicromatismo, che nel vaso italiano è eseguito per mezzo della tecnica *crusted ware*, mentre in quello guanche è ad ingobbio (R. Gonzalez Anton, 1980).

Quest'ultimo tipo di lavorazione sopravvive tuttora in Nordafrica, riproponendoci perciò quella *koiné* mediterranea che qui sostengo a proposito di queste *pintaderas*. A riconferma di questa tesi sembrano essere anche gli autori dei più recenti scavi nella Grotta delle Gallerie (Cannarella et al., op. cit.), i quali ipotizzano per alcuni gruppi ceramici del sito e per le stesse *pintaderas* in questione una provenienza d'importazione. Contatti interetnici con implicazione di scambi materiali vengono del resto confermati dagli stessi autori anche a proposito della presenza nel sito di frammenti di vasi dello stile *a bocca quadrata*.

La seconda *pintadera* qui presa in esame (B), rinvenuta da Neumann negli scavi del 1913-14 e anch'essa fornita di manico forato, presenta un disegno a reticolo molto minuto, non immediatamente identificabile in un particolare contesto simbolico (Fig. 6). Senz'altro si tratta della *pintadera* di più problematica interpretazione della triade proveniente dalla Grotta delle Gallerie, ma non è da escludersi anche la totale assenza di intenzionalità di conferire riferimenti simbolici nell'esecuzione di questo reperto, lasciando supporre che l'ignoto artigiano abbia voluto qui cimentarsi in un'esercizio di imitazione di tessuto o di puro cesello minuto, in tal caso molto ben riuscito. Rimane tuttavia l'aspetto "personalizzato" di tale oggetto da parte del suo possessore.

La terza *pintadera* (C), anch'essa proveniente dagli scavi del 1913-14 e con manico spezzato alla radice, presenta forma vagamente rettangolare ad angoli fortemente arrotondati. Il disegno è costituito da cinque linee parallele serpeggianti, uniformemente ondulate, che percorrono il senso della lunghezza (Fig. 7).

Il riferimento simbolico qui è chiarissimo, di marcata ispirazione acquatica. Fra i grandi valori astratti di cui le genti di Cro-Magnon si fecero portatrici e che poi ebbero ulteriori sviluppi fra le società con scrittura, figura appunto il motivo stilizzato dell'acqua, a linea ondulata oppure spezzata, supremo simbolo di Vita.

Le implicazioni filosofico-religiose ad esso connesse sono molto complesse e variegate, e potrebbero raccogliersi sotto il comune denominatore della Fecondità, ma ciò non significa necessariamente e sempre una correlazione con la Magna Mater e dec simili, anzi, a seconda delle elaborazioni locali questa forza fecondatrice dell'acqua può incarnarsi nel culto del toro, del dio-sole, di una divinità fluviale o, come nel caso dell'antico Egitto, nell'abile sincretismo di tutte queste figure mitologiche (Dall'Agnola, op. cit.).

Trattasi comunque di uno dei più antichi e genuini segni della *koiné* astratta paleomediterranea, ancor oggi sopravvissuta in alcuni segni grafici alfabetici (idem). Del resto anche il già citato Legnani sembra condividere implicitamente il su menzionato substrato panmediterraneo (Legnani, op. cit.), anche se a mio avviso con argomenti esasperati, arrivando a ritenerne ipotizzabile la colorazione cutanea per mezzo di *pintaderas* in relazione al culto della Magna Mater neolitica (?).

In effetti, come detto poc'anzi, è vero che la grande diffusione del culto della Dea va di pari passo con l'esplosione demografica del Cro-Magnon nel Bacino del

Mediterraneo, ed è anche vero che il simbolismo a zig-zag o a motivi ondulati, chiaro riferimento alle Acque Primordiali creative, possiede delle innegabili connotazioni di fecondità mistica, ma personalmente ritengo molto azzardato collegare direttamente tale simbolismo acqueo delle *pintaderas* con il culto della Dea, che non ritengo affatto funzione primaria, né generalizzata, delle formelle, in quanto il loro ruolo di matrici per impressioni cutanee è molto discutibile: anche qui dunque si profila la tendenza ad adattare una funzione dell'oggetto puramente ipotetica alle proprie convinzioni predeterminate.

Come si vede, è grande l'importanza rivestita da un ritrovamento di *pintaderas* nel contesto di uno scavo, ma questi reperti sono troppo spesso ritenuti marginali, invece il loro studio approfondito può contribuire a schiudere insospettabili orizzonti nel quadro di una miglior comprensione del pensiero astratto dell'uomo neolitico. In conclusione, una moderna ed attualizzata interpretazione delle *pintaderas* deve quindi tenere conto di tre possibili "livelli" di impiego:

1) DECORATIVO:

Pintadera impiegata come matrice per tatuaggi e/o decorazioni su pelle e su ceramica.

2) SIMBOLICO:

Pintadera impiegata come stampo per sigilli di terracotta, ad esempio per chiudere le porte dei granai collettivi.

3) COMUNICATIVO:

Pintadera impiegata come simbolo astratto di un concetto (l'Universo, le Stagioni, la Montagna Sacra, il Sesso femminile/Fecondità, ecc.), quindi in ultima analisi come *ideogramma solido* (anche da appendere al collo come monile), cioè elemento anticipatore della scrittura e veicolo di trasmissione di concetti mistici ed astratti.

BIBLIOGRAFIA

- AA. W. : *Caput Adriae-La Preistoria*, Quaderni didattici della Cassa di Risparmio di Trieste, II, Trieste 1984, p. 50.
- Legnani F. : *Piccola guida della Preistoria di Trieste*, Commissione Grotte "E. Boegan", Trieste 1968, p. 29.
- Battaglia R. e Cossiansich M. : *Su di alcuni scavi preistorici eseguiti nel territorio di Trieste nell'anno 1913*, in: "Bullettino di Paletnologia Italiana", XLI, n°1-6 (1915), p. 16.
- Cannarella D., Gerdina A., Keber L. : *Scavi nella Grotta delle Gallerie di Val Rosandra (Trieste)*, in: "Atti della Società per la Preistoria e Protostoria del Friuli-Venezia Giulia", II, Pisa 1973-74, p. 136.
- Dall'Agnola M. : *Alcune considerazioni sui graffiti rupestri canari in relazione al culto solare*, in: "Atti del Colloquio Internazionale «Archeologia e Astronomia»", Roma 1991, pp. 180-188 (e tavole).
- Perrot G. e Chipiez C. : *Histoire de l'art dans l'Antiquité*, Paris 1894, pp. 205-206.

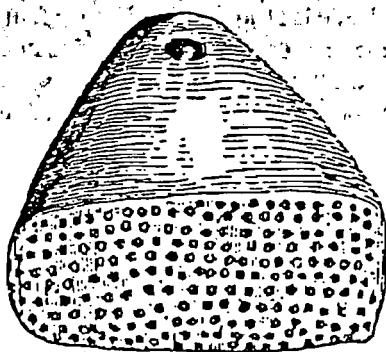


Fig. 1

Pintadera proveniente da scavi a Troia, falsamente interpretata come una spazzola!

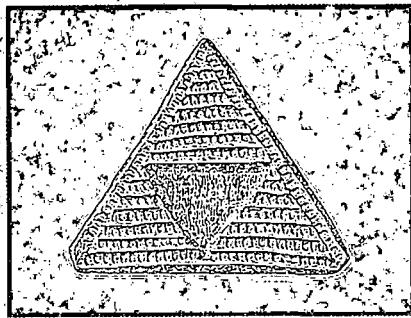


Fig. 2

Famosissima *pintadera* canaria, forse interpretabile come simbolo astratto di "montagna sacra".

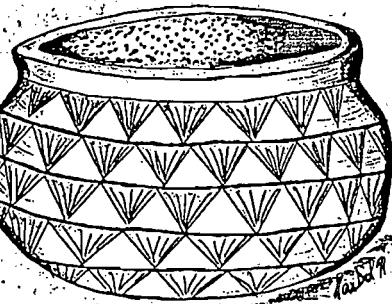


Fig. 3

Vaso con motivo a triangoli contrapposti (Cultura di Matera, Italia meridionale).

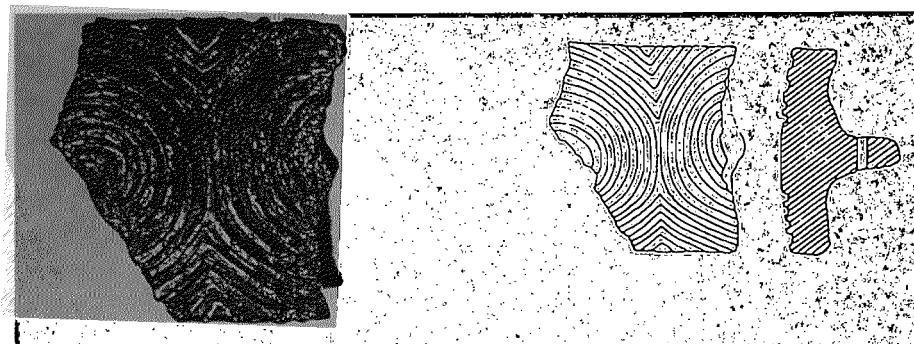


Fig. 4
Grotta delle Gallerie (Trieste, Italia): *pintadera A.*

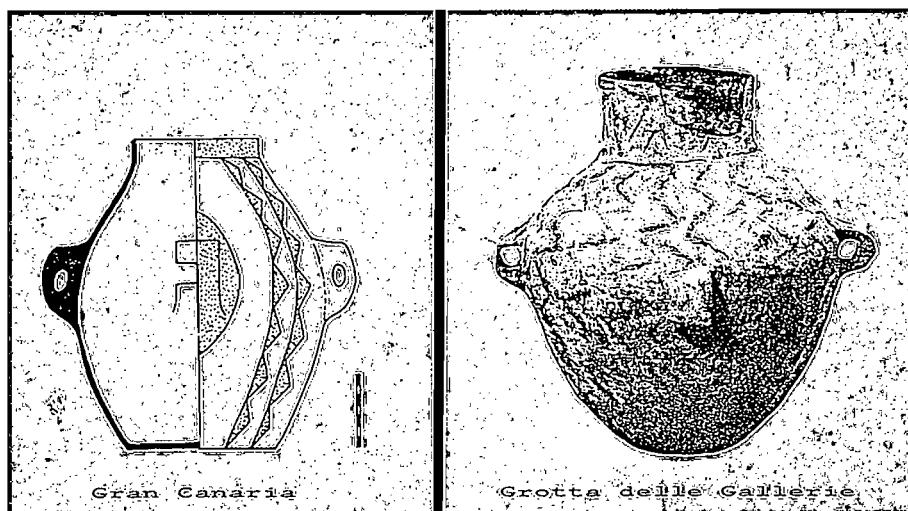


Fig. 5

A sinistra: vaso guanche da Gran Canaria. A destra: vaso scoperto nella Grotta delle Gallerie (Trieste, Italia). In ambedue i tipi si noti la derivazione da un medesimo modello-base, costituito da: a) bocca larga, b) collo corto, c) presenza di 4 anse all'altezza della spalla, d) forma panciuta, e) segni zig-zaganti bicromatici verticali.



Fig. 6
Grotta delle Gallerie (Trieste, Italia): *pintadera* B.

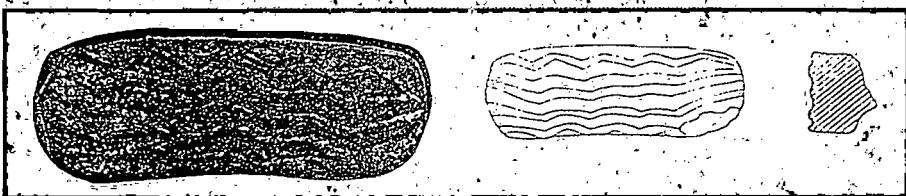


Fig. 7
Grotta delle Gallerie (Trieste, Italia): *pintadera* C.

HALLAZGO ARQUEOLÓGICO EN LAS CAÑADAS DEL TEIDE

JOSÉ JUAN JIMÉNEZ GONZÁLEZ

Museo Arqueológico y Etnográfico

El día 31 de enero del presente año el Museo Arqueológico y Etnográfico recibió la donación de dos vasos cerámicos guanches por parte de D. Victor Manuel Rogríguez Guillén y D. Elio Armas Velázquez, quienes los habían encontrado en las Cañadas del Teide (Tenerife) mientras practicaban una campaña de limpieza.

Ese mismo día sostuvimos una entrevista recabando información pormenorizada de las circunstancias del hallazgo con sus directos responsables, deseosos de que las vasijas fueran convenientemente estudiadas e incluidas en los fondos cerámicos de nuestro Museo.

LOCALIZACIÓN

Las piezas cerámicas fueron halladas, casualmente, el domingo 28 de julio de 1991, en el interior de un escondrijo, convenientemente ocultas por unas piedras de grandes dimensiones, radicado en la base del Teide en la zona conocida como "Montaña Blanca", término municipal de La Orotava, a unos 2.750 m. de altitud.

DESCRIPCIÓN

Se trata dos vasijas (A. y B.) de diferente tamaño y clara tendencia ovoide, realizadas a mano, con un estado de conservación que detallaremos en cada caso.

La mayor (A.) presenta un labio irregular, borde envasado y fondo cónico, con un apéndice de mango cilíndrico sólido (de 2'9 cm. de diámetro, 4'3 cm. de altura y 3,4 cm. de ancho) y una decoración acanalada en pequeños trazos que ocupan el labio en toda su extensión. Sus dimensiones son: altura máxima, 15'5 cm.; diámetro boca, 15'8 cm.; diámetro panza, 17'5 cm.; grosor de las paredes, 0'6 cm. Su estado de conservación es regular, detectándose una amplia grieta de 0'3 a 0'1 cm. que recorre la pieza desde el labio a casi toda su pared; y otra de 0'1 cm. más corta en su desarrollo, situada a 8 cm. de la anterior. Igualmente, pueden apreciarse pequeñas muescas en diferentes sectores del perímetro del labio. Esta cerámica llegó al Museo Arqueológico y

Etnográfico de Tenerife con la fractura de un fragmento del borde de unos 4'4 cm. de largo, ocasionada al procederse a su extracción, que ha sido convenientemente restaurada por el autor de este trabajo.

La menor (B.) muestra el labio irregular, el borde ligeramente envasado, el fondo cónico, un apéndice de mango cilíndrico sólido (de 2,8 cm. de diámetro, 4'2 cm. de altura y 3'4 cm. de ancho, con un orificio ciego de 4 cm. de largo), y una decoración de pequeñas líneas acanaladas que ocupan el labio en toda su extensión. Sus dimensiones son las siguientes: altura máxima, 11'5 cm.; diámetro boca, 12'3 cm.; diámetro panza, 13'6 cm.; grosor de las paredes, 0'6 cm. Su estado de conservación es bueno, aunque es apreciable la fractura de un fragmento del borde de unos 5 cm. de largo y pequeñas grietas perceptibles en la superficie externa e interna.

En ambos casos la pasta es de calidad media con desgrasante medio. La técnica de acabado es alisada, de mejor apariencia en el exterior que en el interior, con una coloración irregular primando los tonos ocre-rojizos en relación al tratamiento operado y a la cocción reductora diferencial que afectó la apariencia cromática de la superficie, posiblemente debida a su ubicación en el proceso de guisado. Esta variación de la coloración del vaso hace innecesaria su clasificación cromática partiendo del Munsell.

SITUACIÓN

Las piezas se encontraron en el interior de un escondrijo, la menor dentro de la mayor, en posición invertida, ocultas por una buena cantidad de rocas captadas en su entorno cercano.

CARACTERÍSTICAS

A tenor del análisis de improntas de tierra apreciables en el interior del vaso mayor (A.) y en la parte externa de la superficie del menor (B.) puede inferirse su colocación original aproximada.

De esta forma, si un sector de la pared externa y parte del borde del mayor, próximo al apéndice, se apoyaba sobre la superficie de deposición, un amplio sector del interior ofrece la coloración terrosa de contacto. Mientras el sector de la pared externa del vaso menor en contacto con esta última, en la zona del borde y apéndice, señala la zona de contacto y deposición respecto al anterior, invadida por una capa de tierra intrusiva.

La situación invertida de las piezas, habitual en la mayoría de los hallazgos de que tenemos constancia, evita que pudieran desplazarse por pérdida de equilibrio fracturándose tras ser colocados.

Podría argumentarse que esta situación trajo consigo la fractura de la vasija mayor debida a la actuación de factores externos (inversión térmica u otros) en consonancia con la cámara de aire que propicia la posición invertida de los vasos. Pero, un examen detenido de la fractura o quiebra de la pared del vaso (A.), revela que ésta se produjo a causa del impacto producido en un punto de su pared externa con un objeto

o superficie contundente y, en cualquier caso, con anterioridad a su deposición definitiva en el escondrijo.

La presencia de huellas de color negro (carbón) en el interior de las dos cerámicas pone de manifiesto que ambas fueron sometidas a una actividad de cremación pretérita con sustancias desconocidas de pequeña envergadura, practicada sólo en la superficie interna, con anterioridad a su colocación en el escondrijo. Los restos de estas huellas revelan, igualmente, el epicentro de esta actividad (con mayor claridad en el vaso de menor tamaño); desde el cual se ahumó una parte importante de la superficie interna en ambos casos, pero con mayor amplitud en la vasija más grande por razones obvias. De esta manera, podemos inferir la inclinación posicional de las piezas, levemente tumbadas sobre una de sus paredes, cuando se produjo el fenómeno crematorio que describimos. En ningún caso puede suponerse que los vasos fuesen puestos al fuego en contacto con la pared externa, dada la ausencia de huellas.

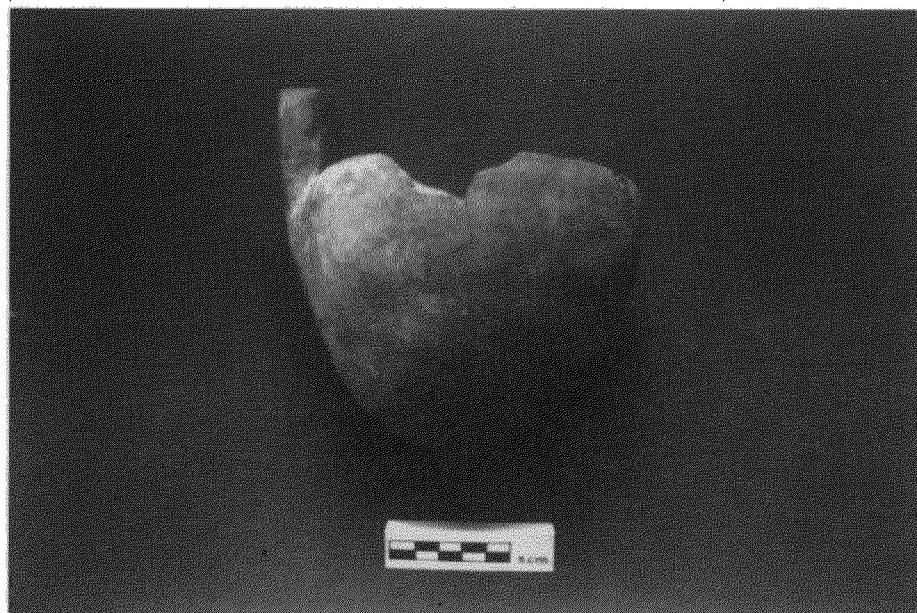
La fractura de las paredes de los vasos se produjo con posterioridad a la cremación citada, sin que en ningún momento podamos inferir que la fractura es producto de dicha actividad. En el caso de las grietas de la vasija menor éstas se produjeron, con bastante probabilidad, en relación con las características específicas de la materia prima utilizada y con el proceso de secado y cocción subsiguientes a su manufactura.

La coloración actual de las huellas carbonizadas es notable en un punto preciso de apariencia oval, e irregular en el resto a causa del paso del tiempo, de la actuación de fenómenos externos que afectaron el lugar de deposición y en relación a la combustión diferencial desde un punto hacia la periferia, que quedó manifiestamente ahumada. Por ello, carece de sentido adjudicarle código cromático alguno partiendo del Munsell.

Por último, también debemos mencionar la existencia de diversas manchas de color blanco de una sustancia indeterminada en el interior de la vasija mayor, situadas intermitentemente en el extrarradio de la huella ennegrecida citada, que redundan en la posición tumbada del vaso mientras se produjo la actividad en su interior. Estos restos de color blanco parecen haberse producido con posterioridad a las huellas de carbón, dada su superposición clara.

Sería necesario proceder al análisis de laboratorio de las manchas citadas en estos vasos y en el que estudiamos en otro lugar¹, a fin de determinar las sustancias de las que proceden, permitiéndonos conocer los contenidos pretéritos que pudieron depositarse en su interior y algunas de las actividades a que estuvieron sujetos, y, si fuera posible, su datación cronológica.

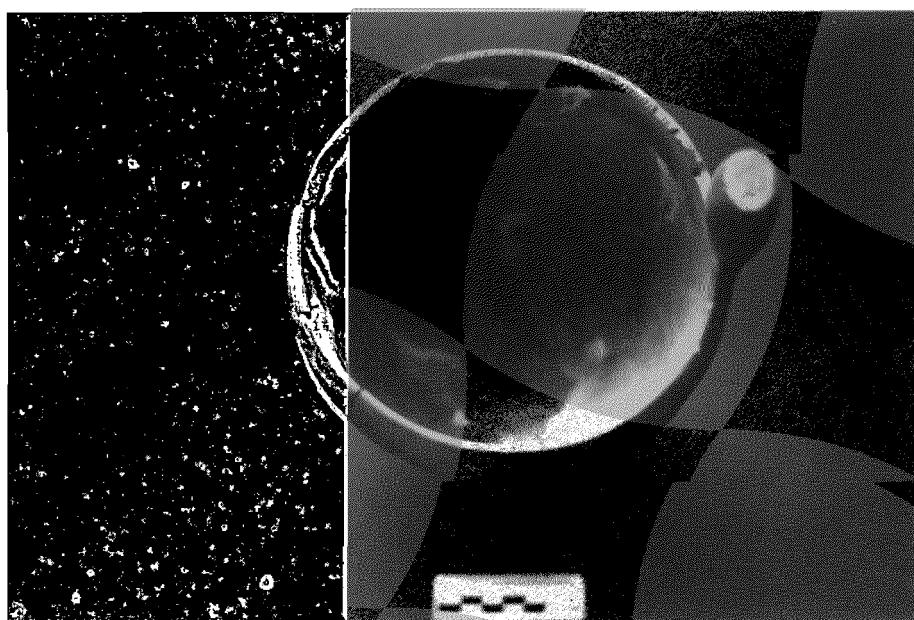
1. J. J. Jiménez González et al. (1991) "Hallazgo arqueológico en Arafo". *Eres. Serie Arqueología*, Vol.2, Núm. 1, (Junio, 1991) Museo Arqueológico y Etnográfico. OAMC/Cabildo de Tenerife. Santa Cruz de Tenerife, pp. 111-113.



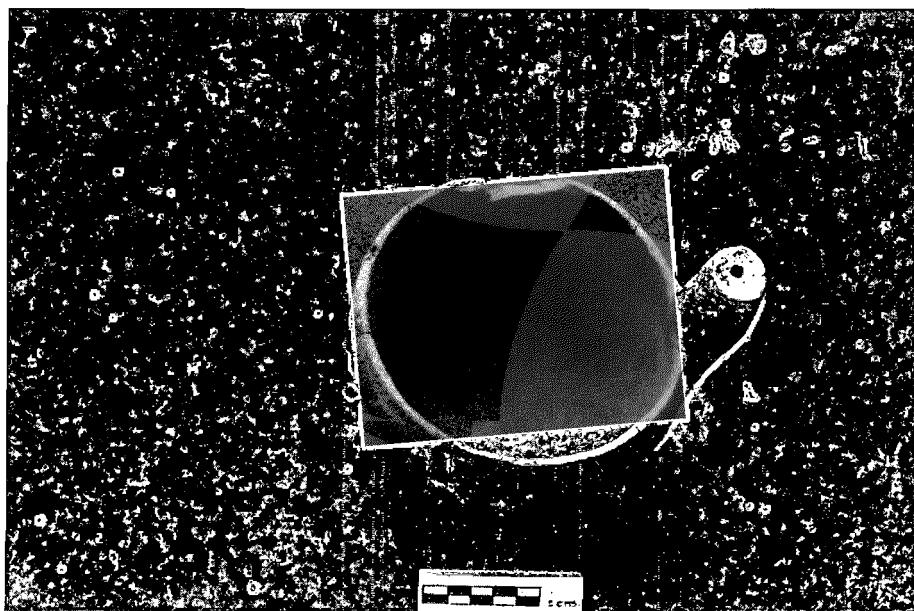
Vaso A



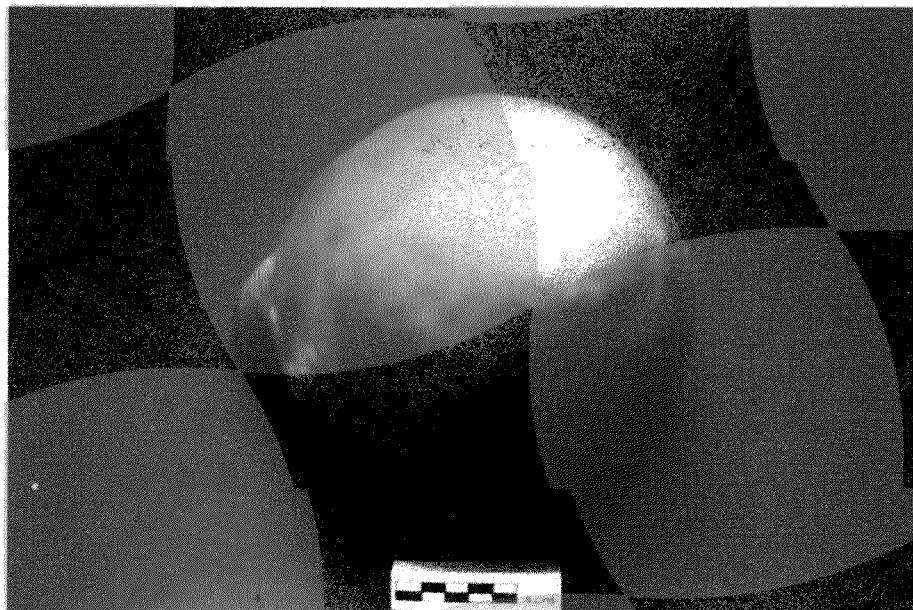
Vaso B



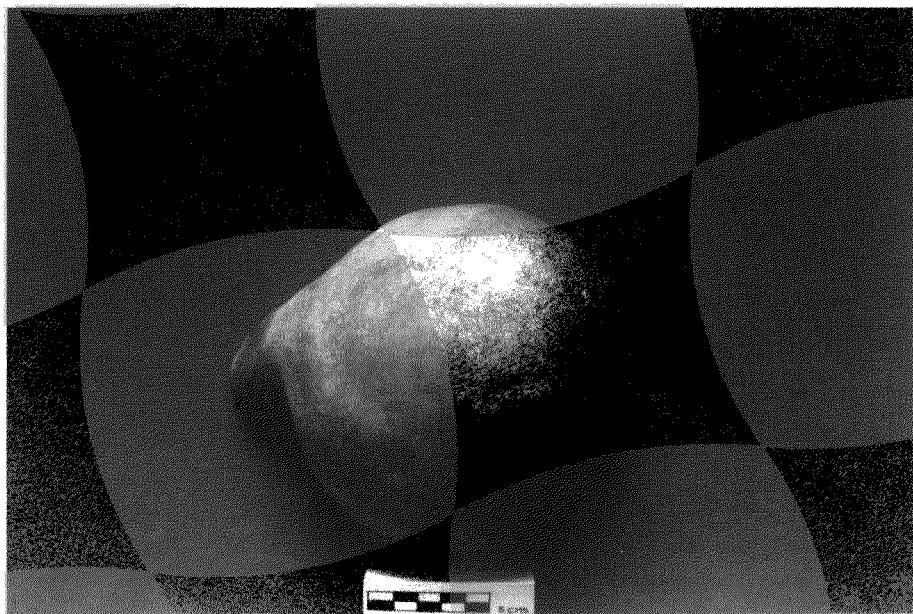
Vaso A



Vaso B



Vaso A



Vaso B

LOS GRABADOS DE "LA PEDRERA", TENERIFE

JOSÉ PERERA LÓPEZ

Universidad de La Laguna

AGRADECIMIENTOS E INTRODUCCION

El presente trabajo es fruto del descubrimiento casual de una estación de grabados rupestres por parte de Moisés González Pérez que nos comunicó el hallazgo y Pablo Vinuesa Fleischmann. Más tarde, Rubén Martínez Carmona localizó otra estación a cierta distancia de la primera. Nuestra labor, por tanto, ha consistido en el estudio de los grabados y su contexto, ayudándonos a ello Benito Darias Delgado.

Dado el expolio sistemático de que han sido y son objeto los yacimientos prehispánicos canarios, preferimos, como medida de seguridad, no dar la localización exacta del enclave. La dificultad de acceso y su desconocimiento han sido los factores que han posibilitado la conservación de la localidad y no quisiéramos que por nuestra causa tuviésemos que lamentar el deterioro de ésta.

Como puede verse en la lámina I, el yacimiento puede subdividirse en tres grupos: dos estaciones de grabados y una de restos de construcciones. Por su localización relativa hemos denominado a las primeras "estación occidental" y "estación oriental"; de ellas, la occidental es la más importante ateniéndonos al número y variedad de grabados. Respecto a las construcciones, nos limitamos a hacer un croquis y una descripción de las mismas. Su posible carácter aborigen plantea serias dudas y sería necesario un trabajo de investigación más profundo que excede a nuestras posibilidades.

LOCALIZACION DEL YACIMIENTO

El conjunto arqueológico estudiado se halla enclavado en un pequeño rellano denominado "La Pedrera", situado en la cara Norte de un roque que se localiza en la zona costera de Tenerife. Se trata de un paisaje extremadamente abrupto, en el que alternan profundos barrancos con escarpadas montañas. Así, aunque el yacimiento se encuentra a 175 metros sobre el nivel del mar, se halla a pocas decenas de metros del mismo en línea recta, pudiéndose decir que está en el borde de un acantilado marino. "La

“Pedrera” se halla abierta a los vientos dominantes del NE, siendo posible contemplar desde ella gran parte de las tierras limítrofes.

El acceso hasta la localidad se hace ascendiendo por una estrecha vereda que más tarde hay que abandonar para, empleando el “campo a través”, cubrir seguidamente la distancia final, en la que hay que llegar a emplear las manos; es, por tanto, una subida que puede presentar una relativa dificultad para aquéllas personas no habituadas al montañismo.

EL MEDIO FÍSICO, GENERALIDADES

Desde un punto de vista geológico, los materiales dominantes en la zona son las lavas basálticas, que alternan con mantos de piroclastos cementados -las tobas o toscas- todo ello diseccionado por una importante red de conductos de emisión del magma: los diques. Aunque no disponemos de dataciones absolutas para el área, si contamos con cronologías relativas obtenidas por paleomagnetismo, que permiten asignar a este lugar una edad en torno a los 5,1-7 millones de años (CARRACEDO, 1979).

Ya a un nivel geomorfológico habría que decir que nos encontramos ante un medio en el que los factores destructivos -la erosión- dominan ampliamente sobre los constructivos, pues se trata de una zona donde la actividad volcánica cesó hace varios millones de años. Los distintos tipos de modelos erosivos ligados a las oscilaciones climáticas del Cuaternario, así como los actuales, son los responsables del presente paisaje. Esos climas se han caracterizado por alternar unos modelos más o menos semiáridos con otros de relativa humedad, actuando sobre un medio de grandes desniveles que han originado importantes desmantelamientos de materiales, acarreos de los mismos, así como una escasa edafogénesis. El análisis paleoclimático tiene una gran importancia en nuestro caso ya que parte del complejo arqueológico está, ya sea asentado sobre materiales sedimentarios, o bien destruido por agentes erosivos.

El estudio de la climatología nos aporta elementos para valorar tanto la conservación como la parcial destrucción del yacimiento. Así, las escasas precipitaciones que estimamos en torno a los 300 milímetros de media anual, una relativa baja humedad atmosférica y una exposición importante a los rayos solares coadyuban a la conservación más o menos intacta de los grabados. Sin embargo, el estudio de factores climáticos como el “spray marino” -“la maresia”- y la tafonización, probablemente relacionada con ésta, evidencia su acción negativa sobre la localidad.

Podemos afirmar que la vegetación presente hoy en día en los alrededores del yacimiento no difiere significativamente tanto del clímax en las vigentes condiciones climáticas como de las que conocieron los aborígenes en el mismo lugar. Se trata de los típicos matorrales xerófilos propios de las zonas costeras y escarpadas de las islas, con predominio de plantas suculentas y espinosas: *Euphorbia canariensis*, *Euphorbia regis-jubae*, *Aeonium sedifolium*, así como gramíneas y otras plantas anuales. Como elementos de flora introducida es de destacar la presencia de higueras (*Ficus carica*) algunas de ellas con indicios de ser ejemplares espontáneos.

DESCRIPCION FÍSICA DEL YACIMIENTO

En la lámina I presentamos un cróquis de los principales elementos que constituyen la zona de "La Pedrera". El estrato inferior está formado por una colada de lava basáltica de espesor indefinido y de tonalidad oscura; sobre ésta se encuentra un potente manto de tobas, es decir, cenizas volcánicas cementadas, y de una tonalidad ocre-amarillenta. Esta plancha tobácea -sobre la que están los grabados- posee un espesor medio de unos 3 metros. En cuanto a sus dimensiones horizontales, "La Pedrera" tiene forma triangular con lados que no sobrepasan los 100 metros de longitud.

El afloramiento del manto de toba tiene lugar fundamentalmente en su sección vertical; sin embargo, en algunos sectores aparece también de forma horizontal, quedando expuesta la capa superior de la capa de piroclastos. Esta presenta una superficie extraordinariamente uniforme, sin prácticamente rugosidad superior a algunos centímetros, hecho que facilitó en su día la labor de los autores de los grabados. Esta característica se explica fácilmente si tenemos en cuenta la génesis de estos materiales: las cenizas volcánicas cayeron verticalmente en forma de lluvia, procediendo a nivelar, relativamente, el terreno preexistente, tal como lo haría un manto de nieve. Esto no contradice el hecho de que el índice de inclinación de las tobas sea variable ya que sigue a grandes líneas la morfología anterior a su disposición; concretamente, en el extremo Norte del manto tobáceo -y principal enclave de los grabados-, el buzamiento es de unos 20 grados y en sentido descendente desde el Este al Oeste. En este sector y en líneas generales, podemos individualizar una superficie de plancha tobácea que tendría unos 11 metros en sentido Norte-Sur. En las otras áreas en que aflora horizontalmente el estrato de tobas, no suele pasar de 1-2 metros de anchura máxima, pues aparecen enseguida otros materiales que recubren el estrato.

LA DESTRUCCIÓN DEL MANTO TOBÁCEO

En la actualidad la capa de toba se encuentra sometida a un proceso erosivo que se manifiesta con formas químicas iniciales y que se traducen en efectos mecánicos *a posteriori*. El fenómeno tiene lugar fundamentalmente en la cara vertical expuesta al Este; aquí se reciben perpendicularmente los vientos marinos cargados de sales, las cuales, probablemente, generan un proceso de erosión química -la tafonización- que da lugar a la formación de pequeñas cuevas en la roca atacada; a medida que estas cavidades se profundizan generan una falta de apoyo en los materiales suprayacentes, en los cuales se forman grietas que acaban por provocar la caída de fragmentos con dimensiones de hasta un metro de lado mayor. Es ésta la causa de la parcial destrucción de los grabados, ya que la meteorización que incide sobre los mismos es mínima. Y esto como consecuencia de la exposición que presenta la superficie, casi horizontal, de la plancha de toba; en ella, la incidencia del "Spray marino" es casi inexistente ya que no supone un obstáculo en el discurrir horizontal del viento, que si choca contra las superficies verticales. Al mismo tiempo, la posición de solana de la capa tobácea contribuye a evitar los efectos destructivos de la humedad atmosférica.

El estudio de la microvegetación evidencia lo que hemos afirmado anteriormente, explicando con ello cómo han podido soportar los grabados el paso de los siglos en un ambiente supuestamente tan hostil como es la cercanía del medio marino. Para nuestra investigación hemos observado cuales eran las especies de líquenes que crecían en cada sector. Así, hemos comprobado que sobre la superficie horizontal de las tobas —donde están los grabados— aparecen líquenes de los denominados “crustáceos”, tales como los del género *Caloplaca sp.*; se trata de líquenes que forman costras adheridas al sustrato y que tienen un crecimiento muy lento al desarrollarse en un medio con pocos nutrientes. En los sectores verticales, por el contrario, crecen líquenes de crecimiento más rápido, del tipo “fruticuloso”, es decir, con aspecto de un diminuto arbusto, estando representados fundamentalmente por especies del género *Roccella*, —las orchillas—; éstas viven en lugares donde la humedad del aire es muy elevada, como es en nuestro caso los sectores verticales de la plancha de toba donde el aire incide perpendicularmente.

LOS MATERIALES SEDIMENTARIOS

Recubriendo a las tobas aparece una potente capa de derrubios de ladera que tienen un espesor variable, abarcando desde menos de un metro en el extremo Norte hasta, quizás, más de 10 metros inmediatamente por debajo del roque situado al Sur del yacimiento. En su composición podemos distinguir dos sectores: primeramente, en la parte inferior, un conglomerado de piedras de dimensiones centimétricas y decimétricas, de pátina antigua, empastadas en una matriz fina que proporciona al conjunto una relativa cementación y con abundante colonización vegetal. El segundo sector estaría formado por una cobertura de piedras de tallas decimétricas en disposición caótica, sin matriz fina, con pátina reciente, sin colonización vegetal y sin cementar. Esta última acumulación detrítica es la que da origen al topónimo con el que se conoce el lugar: “La Pedrera”.

La cronología de estos materiales es, probablemente, discreta. Es posible que los sedimentos cementados puedan adscribirse al episodio climático de carácter árido datado en torno a los 18.000-9.000 B.P. (CRIADO, 1981). El hecho de que se disponga en forma de escarpe sobre el estrato de tobas evidencia que la tendencia actual es la de su desmantelamiento, por lo que podríamos definirlos como relicticos y anteriores, en cualquier caso, a la arribada de los primeros aborigenes a las islas. Probablemente, esos derrubios que cubrían completamente la plancha tobácea han ido dejándola al descubierto en los últimos 9.000 años. Esto no significa que la caída de piedras desde el roque haya cesado; por el contrario, “La Pedrera” evidencia que el talud de derrubios es funcional en la actualidad, aunque no con el vigor que tuvo a finales del Pleistoceno, lo cual ha originado que el frente más distante al roque esté en fase de franca destrucción.

Sobre el estrato de tobas aparecen en algunos sectores acumulaciones sedimentarias de heterogénea composición y sin cementación, que nosotros interpretamos como resultado del acarreo y posterior deposición a distancias de 2-3 metros de materiales arrancados al paquete de derrubios que hemos tratado anteriormente. Estos sedimen-

tos, con espesores de hasta 40 centímetros, tienen interés en cuanto a que su cronología puede ser muy reciente -decenas o centenares de años- lo que plantearía la posibilidad de que puedan recubrir posibles grabados. En la lámina II hemos señalado con la letra "D" este último tipo de sedimentos.

DESCRIPCIÓN DE LA ESTACIÓN OCCIDENTAL

Aunque la plancha semihorizontal de cenizas volcánicas cementadas es mucho más grande, la superficie ocupada por los grabados se restringe a un área más o menos rectangular que tiene los lados menores orientados al Este y al Oeste; su longitud es de unos 6 metros y el ancho es de 4,15 metros. La estación rupestre se encuentra semidestruida por su lado oriental como consecuencia del avance del acantilamiento, aunque no creemos que el sector desaparecido representase cuantitativamente más que una porción muy reducida en comparación con toda la estación.

Hemos contabilizado un total de 22 figuras que, tipológicamente, dividimos en 6 categorías. Éstas van desde los antropomorfos hasta los abstractos pasando, posiblemente, por los zoomorfos.

La ordenación de los grabados no parece seguir un orden prefijado salvo en el caso de los antropomorfos femeninos que presentan una aparente alineación en sentido Este-Oeste.

Finalmente, cabe señalar que aunque estudiamos 22 figuras, los grabados presentes en la estación podrían superar este número; el problema está en que existe toda una serie de formas en las que es muy difícil determinar si nos encontramos ante grabados o simples rehundimientos naturales. Por esta razón, hemos preferido ser conservadores y analizar solamente aquello que parece claramente ser una creación humana.

GRUPO DE LOS ANTROPOMÓRFOS FEMENINOS

Englobamos en este apartado cuatro grabados más o menos acabados cuyo denominador general parecen ser la representación esquemática de mujeres embarazadas. Curiosamente dan la impresión de que se encuentran orientadas en dirección Este, punto cardinal hacia el que apuntan las "cabezas", y alineadas en "fila india" también en sentido Oeste-Este. Son las figuras más llamativas del conjunto, especialmente por el tamaño que alcanzan.

FIGURA N° 1, LÁMINA III

Grabado en el que se ha excavado un surco continuo mediante picado y sin abrasionar; el canal conseguido se estrangula en su extremo oriental a modo de "8", dejando aisladas dos "islas" de roca con formas toscamente clípticas y de dimensiones desiguales: la oriental, a la que denominaremos "cabeza", considerablemente más pequeña que la occidental, a la que denominamos "torso y vientre". En los extremos occidentales de las "islas" hay sendas penetraciones del surco que se orienta en dirección más o

ménos Oeste-Este; a la que aparece en la "cabeza" llamaremos "boca" y a la que se inserta en el "vientre" denominaremos "vagina".

Las dimensiones de la figura así formada son de unos 59 centímetros de distancia entre los puntos más distantes, es decir, del vientre a la cabeza: Esta medida se puede descomponer en unos 41 centímetros que alcanza el conjunto vientre-torso, unos 14 centímetros la cabeza y los 3,5 del "cuello". En cuanto al ancho del grabado, el máximo se alcanza en el torso con 28,8 centímetros, la cabeza posee 12,3 centímetros de anchura mayor y el cuello en torno a los 7 centímetros. La anchura del surco varía alrededor de los 1-2 centímetros. La boca tiene unas dimensiones que van desde los 2,5 de largo a los 1-2 centímetros de ancho. La vagina tiene una longitud mayor de 3,5 centímetros y un ancho mínimo de 0,3 centímetros hasta 1,5 centímetros de abertura máxima. En general la profundidad del surco se mantiene constante en toda la figura, alcanzando un valor medio de 1,5 centímetros. Fijar la orientación del grabado resulta un tanto subjetivo; si tomamos la cabeza como vértice de flecha respecto al resto del cuerpo la dirección que nos indicaría sería más o menos Oeste-Este. También hay que tener en cuenta que la plancha de tosca sobre la que se inserta la figura está inclinada hacia el Oeste, de tal manera que la cabeza queda realizada respecto al resto del motivo.

El estado de conservación es bueno y no parece que hubiese intención por parte de los autores de completar el esquema con la realización de "brazos" y "piernas".

FIGURA N° 2, LÁMINA IV

Mediante técnica de picado se ha conseguido excavar un canal con sección en forma de "U" y cuya planta dibuja una media luna, apuntando los extremos de ésta al SE y al SW mientras que la parte convexa se orienta al Norte. La distancia más corta entre los extremos distales del grabado es de 64 centímetros. El ancho del surco varía entre 1-2 centímetros y, en cuanto a su profundidad, está en torno a los 0,6 centímetros. La orientación, siguiendo la recta imaginaria que une sus puntas, es Oeste-Este.

El grado de conservación es bueno, mientras que el estado de realización del grabado presenta una doble hipótesis: ¿se trata de una forma acabada o por el contrario nos encontramos ante un primer paso en la elaboración de otra figura "femenina" similar a la figura I? La observación global de la estación nos lleva, casi sin posibilidad de alternativa, a asociar la curvatura que presenta el surco estudiado con las también curvaturas de los que hemos supuesto "vientres" de figuras femeninas; además, la figura nº 1 se encuentra alineada precisamente con aquéllas. Nuestra interpretación es que estamos ante el estadio inicial de realización de otro antropomorfo femenino que, por razones desconocidas quedó inacabado.

FIGURA N° 3, LÁMINA V

Grabado que en líneas generales sigue las pautas de la figura nº 1; sin embargo, contiene una serie de variantes que le confieren especificidad: El picado se ha extendido superficialmente, con lo que ya no se contenta con limitar los contornos de lo que

pretende representar, sino que juega con el relieve a la hora de dar énfasis a determinados puntos de aquél.

La mayor parte del motivo está ocupado por una zona central con forma elíptica de orientación Oeste-Este, en cuyos extremos se proyectan dos apéndices: el occidental es de forma redondeada semejando una cabeza, al igual que en la figura nº 1 pero, a diferencia de aquella, se ha excavado la totalidad de la misma hasta el punto de darle la profundidad máxima del grabado con 3,6 centímetros. En su extremo opuesto se proyecta en sentido Este-Oeste un surco rectilíneo que, a primera vista, podría interpretarse como una representación fálica; no obstante, si lo encuadramos en el contexto en el que nos encontramos -una figura aparentemente femenina con esteatopigia y/o embarazo así como las otras figuras representadas- nos lleva a pensar que, quizás, lo que se pretendió representar en la toba era la esquematización de una vagina. En la parte central del grabado y conectado con la parte excavada en los laterales por un estrecho surco, se ha rehundido la roca hasta una profundidad de 2,8 centímetros, dando lugar a un orificio al que inicialmente denominaremos "corazón".

La distancia máxima, es decir, de cabeza a vagina, es de 58,4 centímetros; de éstos, 48,4 corresponden al torso-vientre y los 10 centímetros restantes a la cabeza. El ancho mayor a la altura del vientre es de unos 31 centímetros, mientras que la cabeza posee un ancho de 10,5 centímetros. El corazón abarca en superficie una zona más o menos circular con unas dimensiones de 6,2 x 5 centímetros; el surco que lo une al resto del grabado sólo alcanza los 0,8 centímetros. La vagina se alarga en sentido Este-Oeste en unos 6 centímetros, con un ancho de 1-2 centímetros y una profundidad escasa del orden de un centímetro de excavación. Los laterales del cuerpo están rehundidos hasta los 2-2,5 centímetros y su extensión lateral varía ampliamente entre los 3 y los 7 centímetros.

Como las figuras anteriores, el estado de conservación es aceptable y no parece encontrarse deteriorada ni inacabada.

FIGURA Nº 4, LÁMINA VI

Mediante picado se ha elaborado un surco que adopta un trazado curvo pero que no llega a completar el círculo, quedando abierta la figura por su lado Sur; esta abertura es mayor o menor, según se considere como natural o no una prolongación de la ranura excavada en sentido Este-Oeste (representada a trazos en el dibujo), zona en la que el grabado se difumina haciendo imprecisos sus límites. Aunque dicho círculo se muestre inacabado, todo hace suponer que nos encontramos ante la representación de un torso-vientre al igual que en los casos anteriores.

El diámetro máximo que correspondería a la altura del cuerpo es de 41 centímetros, mientras que el ancho es de unos 30 centímetros. El grosor del surco oscila entre 1 y 2 centímetros y su profundidad tiene una media de 1,2 centímetros.

Hacia la parte NW y con rumbo NW-SE se dispone una ranura de 10 centímetros de largo por 0,8 de profundidad que interpretamos como la esquematización de una

vagina; el ancho de la misma va desde los 2,4 centímetros en su sector inferior a los 0,7 en el superior.

Justo en el centro del grabado y desconectado del resto del mismo, hay una cavidad de unas dimensiones superficiales de 3,3 x 1,2 centímetros, orientada al NE y de una profundidad de un centímetro, a la cual hemos llamado "ombligo".

El grado de deterioro es escaso y parece que nos encontramos ante una figura inacabada, hecho que ya intuimos, con menor seguridad que en este caso, para la figura nº 2. Aquí, no solamente es uno de los flancos el que no llegó a completarse, sino que tampoco se llevó a efecto la elaboración de la cabeza.

GRUPO DE ANTROPOMORFOS ASEXUADOS

En este grupo incluimos 6 grabados de parecidas dimensiones y cuyo motivo parece estar próximo. Van desde figuras claramente antropomorfas hasta otras que podrían serlo remotamente. Dos son las diferencias principales respecto al primer tipo de antropomorfos femeninos. Una, el tamaño: frente a los 40-60 centímetros de aquellos, los tratados ahora oscilan entre los 19,5-24 centímetros de lado mayor. En segundo lugar, frente a los rasgos sexuales de los primeros, los de la nueva clase se limitan a representar los rasgos más básicos del esquematismo antropomorfo -cabeza, tronco y extremidades- desprovistos de atributos que indiquen sexualidad.

Como en los casos anteriores, el picado continuo ha sido la técnica empleada para su realización.

En lo que respecta a su conservación, los 6 no parecen sufrir desperfectos significativos, aunque sus menores dimensiones no los hacen tan visibles como los primeros, por lo que alguno puede pasar inadvertido a una primera ojeada.

FIGURA N° 5, LÁMINA VII

Grabado en forma de cruz latina con indicios de querer representar una figura humana; para ello se ha rehundido y ampliado el extremo superior de la cruz, dando lugar a la aparición de una "cabeza"; asimismo, se ha elaborado una bifurcación de la base de la cruz a modo de "piernas" o "pies".

La distancia máxima o altura es de unos 19,5 centímetros, mientras que de punta a punta de los "brazos" hay 13 centímetros. La cabeza tiene una altura de 3,5 centímetros por 3 centímetros de ancho. Los pies o piernas miden 3 centímetros de largo por 1-1,5 de ancho. Entre los brazos y la cabeza el surco se estrecha, no sabemos si por casualidad o porque se pretendió dar la idea de un "cuello"; lo cierto es que el ancho es de sólo 5 centímetros frente a los 1-1,5 del resto del cuerpo. Un examen de la profundidad que adquiere el grabado revela que la misma no es aleatoria, sino que se hace más intensa en algunos puntos, como queriendo realzar determinadas partes del supuesto cuerpo humano representado. Un corte NE-SW y otro SE-NW evidencian que se ha rehundido más la "cabeza", la intersección de los brazos con el tronco, es decir, el "corazón" y el extremo distal, los "pies"; así, la cabeza tiene un centímetro de profundidad, uno tiene también el corazón, 0,5 los pies y sólo 0,3 el resto del cuerpo.

FIGURA N° 6, LAMINA VII

Este grabado repite el modelo del anterior, detectándose dos modificaciones: no se han representado los pies/piernas y la cabeza adquiere mayores dimensiones. La altura de la figura es de 24 centímetros, mientras que los brazos extendidos alcanzan de punta a punta una embergadura de 15 centímetros. La cabeza tiene 7 centímetros de largo por 6,5 de ancho. El ancho medio del tronco es de 1,5 centímetros y de 1,5-2,5 en los brazos. La profundidad que alcanza el surco es de 2,5 centímetros en la cabeza, 1,5 en el corazón, 3,5 en los pies y 0,3 en brazos y tronco; medidas, como puede apreciarse, muy similares cuantitativa y cualitativamente a las de la figura nº 5.

FIGURA N° 7, LÁMINA VIII

Grabado que a primera vista no parece antropomorfo, pero en el que tampoco se puede descartar esa posibilidad. Un surco longitudinal termina en uno de sus extremos en un gran círculo que, siguiendo el esquema anteriormente citado, podría interpretarse como la tosca representación de una cabeza humana. El otro extremo del surco acaba en tres pequeños apéndices que, forzando las interpretaciones, podrían asimilarse con unos pies/piernas y falo. Justo donde nace la cabeza se proyecta hacia el SW un largo pedúnculo que se engrosa a medida que se aleja del tronco central; la identificación del mismo con un brazo humano resulta, como en los otros elementos, bastante forzada. La longitud que alcanza el tronco central es de 22,5 centímetros, de los que 8 corresponden a la cabeza. Las extremidades inferiores se prolongan entre 1 y 2 centímetros y, por lo que se refiere al brazo, llega a tener 13 centímetros de longitud. Frente a los 1-2 centímetros de ancho del tronco central, la cabeza se engrosa hasta los 9 centímetros. El brazo parte de un estrangulamiento de 0,5 centímetros de ancho y se expande hasta los 4 centímetros de ancho cerca de su extremo final, en el que de nuevo tiende a estrecharse. El ancho del trípode sobre el que parece descansar la figura es de unos 6 centímetros, siendo de un centímetro el grosor que poseen cada una de las extremidades que lo componen. Siguiendo lo que parece norma en las demás figuras, la máxima profundidad se alcanza significativamente en la cabeza, con 3 centímetros de excavación; el resto de los elementos, -tronco y brazo-, no pasan de 1,5 centímetros.

FIGURA N° 8, LAMINA VIII

Nos encontramos ante un grabado cuya posible adscripción antropomorfa plantea dudas. Dos surcos groseramente rectilíneos se entrecruzan en ángulo recto; el abultamiento de uno de los extremos de aquellos nos lleva, teniendo en cuenta las características de los descritos anteriormente, a suponer la posibilidad de que dicha protuberancia sea la cabeza de otro antropomorfo. Como ya vimos en la figura nº 4, aparece aquí también el problema de las partes de los grabados en que éstos se hacen difusos, siendo muy difícil interpretar dónde está la frontera que separa lo que es obra humana de lo que es relieve natural de las rocas. De este modo, el extremo Norte que parece representar los pies se disimula imperceptiblemente, por lo que la representa-

ción gráfica y la toma de medidas se hace muy subjetiva. La altura máxima, teniendo en cuenta lo antedicho, la hemos establecido en unos 20 centímetros, de los que unos 6 corresponderían a la cabeza. La longitud del brazo izquierdo dirigido hacia abajo es de 7 centímetros por 6 centímetros el del brazo derecho, que se encuentra en posición extendida. El ancho del cuerpo tiene unos 4,5 centímetros en el centro, 4 centímetros de máximo en la cabeza, 2,5 en el cuello y se reduce a un centímetro en la base de los pies. Los brazos cuentan con 2-3 centímetros de anchura en el izquierdo por 1,5-2 centímetros en el derecho. La profundidad es de 2,4 centímetros en la cabeza, 2 en el tronco y menos de 0,5 en el resto, por lo que parece primarse ciertos puntos vitales como ya citamos en casos anteriores.

FIGURA Nº 9, LÁMINA IX

La figura nº 9 se compone de surcos entrecruzados que no parecen a primera vista representar formas humanas. Hay un surco mayor que en uno de sus extremos se tuerce y proyecta un pequeño apéndice. Hacia la mitad de dicho tronco principal parte una ramificación que vuelve a girar a cierta distancia para seguir una dirección paralela al primero. La longitud del canal mayor es de 22 centímetros, teniendo 4 centímetros la punta torcida del mismo. La ramificación lateral llega a los 13 centímetros y la parte extrema de la misma, paralela a la primera, es de 15 centímetros. El ancho, a diferencia de los casos anteriores, es máximo en la ramificación lateral, en cuyo codo se alcanzan los 4 centímetros, en torno a los 2 centímetros en el resto de la misma, 1-2 en el eje principal y 1-1,5 en la desviación extrema de la misma. Sin embargo, estos valores se invierten en profundidad, ya que los 2,5 centímetros del canal principal se reducen a 2 centímetros en el apéndice lateral.

FIGURA Nº 10, LÁMINA IX

Este grabado se asemeja formalmente al número 7; sin embargo, en aquel podríamos atrevernos a hablar de toscas insinuaciones antropomorfas; en este caso resulta totalmente especulativo adscribirlo a cualquier tipo de simbología. Esencialmente, se compone de un tronco central del que a un tercio de uno de sus extremos se ha separado un apéndice casi perpendicular al primero, el cual, poco después, se acoda y se proyecta de forma paralela al surco central. El tronco principal se extiende longitudinalmente a lo largo de 19,5 centímetros. El brazo que parte de aquel alcanza los 9 centímetros y la "mano" en que termina el anterior mide 7 centímetros. El ancho del cuerpo principal es de 3 centímetros y la extremidad articulada desciende a los 2-2,5 centímetros. La profundidad está también proporcionalmente distribuida de tal manera que llega a los 2,5 centímetros en el eje central y se reduce a 2 centímetros en la ramificación lateral.

CAZOLETAS

Dos son las depresiones artificiales que podemos englobar bajo este calificativo; ambas presentan en común el ser de forma circular, tener dimensiones superficiales parecidas y poseer la mayor profundidad excavada de todo el conjunto de grabados. La técnica de elaboración parece haber sido el picado y su estado de conservación es prácticamente perfecto. Ahora bien, la designada con el número 12 corre serio peligro de desaparecer a medio plazo, como consecuencia del retroceso erosivo del escarpe cerca de cuyo borde se encuentra. Así, una grieta ha rodeado completamente a dicha cazoleta (véase lámina II) y amenaza con desgajar el fragmento de roca en la que aquella se encuentra.

A este grupo sumamos cuatro pequeños agujeros que tipológicamente recuerdan a las primeras, aunque poseen dimensiones muy reducidas.

FIGURA N° 11, LÁMINA X

Excavación de contorno groseramente circular cuyo diámetro varía alrededor de los 20-22,5 centímetros. La profundidad es de 5,5 centímetros en su lado Sur; en la mitad Norte, el fondo de la cazoleta está cubierto de sedimentos a partir de los 3,5 centímetros por término medio. La razón de que el material detrítico se encuentre sólo en este sector de la cazoleta está en que ésta refleja el basculamiento de la plancha de toba hacia el NW. Dado que hemos prescrito no tocar esos materiales, desconocemos la exacta profundidad de ese sector, aunque sospechamos que no debe de diferir mucho de la zona al descubierto.

FIGURA N° 12, LÁMINA X

Depresión de planta circular con diámetros variables en torno a los 21-23 centímetros. En su cara Norte el reblandimiento es más perpendicular a la superficie y llega hasta los 9,5 centímetros de profundidad; en la cara Sur, el perfil que presenta el declive del flanco de la cazoleta es muy suave; sin embargo, se alcanza la mayor profundidad excavada con 12,3 centímetros. Si hiciéramos un corte W-E, los perfiles serían más regulares, alcanzándose valores de 10,5 y 10,8 centímetros en las caras Oeste y Este respectivamente.

FIGURAS N° 18, 19, 20 Y 21, LÁMINA XIV

En el sector Oeste de la estación rupestre hemos localizado cuatro pequeños orificios a los que hemos denominado microcazoletas. En tres de ellas se observa una planta circular; en la cuarta, la planta es de triángulo equilátero. Los diámetros de las primeras son, de mayor a menor, de 4,5 y 2,5 centímetros y su profundidad es de 4,5 la primera, 2,5 la segunda y de 2 centímetros la tercera. La cazoleta de planta triangular tiene lados de 3 centímetros y la excavación alcanza los 2 centímetros de profundidad.

GRUPO DE GRABADOS ABSTRACTOS

En este grupo incluimos 3 manifestaciones rupestres que, en parte por estar medio destruidas, no las podemos adscribir a los otros grupos ni parecen presentar indicios de que se hubiese tratado de representar en ellos formas para nosotros conocidas; son, a primera vista, representaciones abstractas. En las tres la excavación ha dejado aislados sectores de roca tal como sucedía en los antropomorfos femeninos. Las dimensiones, sin embargo, no son un factor aglutinante, pues van desde grabados pequeños a otros de gran tamaño. Es de lamentar que los dos grabados mayores, o lo que queda de ellos, estén destruidos en una proporción que nos es desconocida pero que sospechamos importante.

FIGURA Nº 13, LÁMINA XI

Nos encontramos con el grabado de mayores proporciones del conjunto y ello a pesar de encontrarse incompleto. La superficie abarcada por el mismo es vagamente rectangular. En sentido Este-Oeste la dimensión es de 53 centímetros; el ancho medio en sección NE-SW es de unos 30 centímetros con un máximo de 34 centímetros. El surco es bastante ancho pues tiene una media de 4-7 centímetros y en el sector Oeste llega a tener 18 centímetros de grosor.

Dicho surco deja aislada del resto de la superficie una "isla" de roca, sin formas definidas, con lados mayores de 43 x 24 centímetros. Hacia el Oeste de la misma hay otro grabado, también de forma muy irregular, y cuyas dimensiones máximas son de 10 x 4 centímetros. La profundidad que ha alcanzado la excavación de roca varía alrededor de los 4 centímetros en el "foso" exterior, en la excavación central es de unos 3 centímetros.

El gran problema de este grabado es su destrucción por la erosión; la cara E-SE del mismo se encuentra bruscamente cortada por el retroceso del escarpe, justo en un sector donde el surco excavado atraviesa toda la figura con rumbo SW-NE en una longitud de unos 37 centímetros. Es posible que en los derrubios situados al pie del pequeño escarpe inmediato puedan encontrarse los fragmentos desaparecidos.

FIGURA Nº 14, LÁMINA XII

Grabado con forma de medio círculo con rebajamiento de roca que deja aisladas dos porciones de roca en su interior; la cara recta de esta "media luna" tiene unos 30 centímetros de longitud, mientras que el radio mayor es de 18 centímetros. De las dos "islas" situadas dentro de la figura, la localizada al Norte tiene forma de "L", cuyos lados miden unos 7 x 7,5 centímetros; la otra porción de roca aislada, situada hacia el lado Sur, es mayor que la anterior y groseramente elíptica, midiendo 13 x 18 centímetros.

Aunque no se puede hablar aquí propiamente de surco sino de zonas excavadas, el ancho medio de ésta está en torno a los 4-5 centímetros, mientras que su profundidad está entre 2,3 y 2,5 centímetros.

Al igual que la figura nº 13, el retroceso del escarpe ha seccionado parte del grabado en su lado Este; de la observación del mismo y proyectando de forma imaginaria las líneas curvas que lo conforman, da la impresión de que, quizás, el sector destruido fuera bastante importante, por lo que nos encontraríamos sólo ante una parte reducida de lo que debió de ser el grabado original.

FIGURA N° 15, LÁMINA XII

Grabado totalmente irregular cuya longitud en sentido NE-E, W-SW es de 14,5 centímetros, mientras que en un corte del NW al SE cuenta con 22,5 centímetros. El rehundimiento abarca toda la figura, salvo tres "islas" que han quedado aisladas y cuyas dimensiones van de un mínimo de 2 centímetros a un máximo de 5. La profundidad excavada es variable aunque oscila entre los 0,5 y los 1,5 centímetros; en la zona central, no obstante, se alcanza un rehundimiento máximo que llega a los 3 centímetros.

Aunque la figura aquí tratada no ha sufrido los efectos de la erosión que tanto han afectado a las otras dos de este grupo, las menores dimensiones de ésta hacen que pase un tanto inadvertida en comparación con las formas mayores de la estación rupestre.

GRUPO DE GRABADOS GEOMÉTRICOS

Dos son las formas que incluimos en este epígrafe; no presentan ningún grado de similitud entre ellos en lo que se refiere al tamaño, pero si, en cuanto a la tendencia a cruzar surcos que, a su vez, se enmarcan en superficies delimitadas por otros, dando lugar así a la aparición de polígonos semejantes a ambos lados de cada acanaladura.

FIGURA N° 16, LÁMINA XIII

Grabado compuesto por una serie de surcos de forma rectilínea unos y curvos otros; los mismos se entrecruzan dando formas geométricas. En el sector Norte hay zonas donde dichos surcos se difuminan haciéndose muy difícil precisar donde acaba la obra humana y donde empiezan las formas naturales de la roca. Hacia el NE del grabado hay un orificio cuyas medidas de anchura y profundidad exceden ampliamente las del resto. La longitud mayor del grabado es de 51,5 centímetros, siendo 39 centímetros la longitud del lado menor. El ancho medio de los surcos podemos situarlo en torno a 1-2 centímetros, siendo su profundidad de 0,5 a 1,6 centímetros, aunque la mayor parte no pasa de 0,5 centímetros. El agujero de la zona NE, sin embargo, tiene un diámetro de unos 6 centímetros y su profundidad es también de 6 centímetros.

El grado de conservación es bueno, siendo sólo de lamentar el hecho de que el picado en algunos sitios sea bastante tenue, lo que dificulta seguir los contornos auténticos del grabado.

En cuanto a su interpretación, si observamos la figura en sentido E-W será posible que cualquier observador sugiera que nos encontramos ante la esquematización de un pez. En él serían distinguibles cuatro sectores: 1) un cuerpo central, de forma ovoide

que se asimilaría al cuerpo de un pez; 2) en el extremo más avanzado de éste y naciendo de la estrangulación de los surcos, se abriría en forma triangular lo que podríamos identificar como la cola del pez; 3) los trazos, imprecisos al principio, evidentes en su extremo, del sector NE, pueden asimilarse a una aleta dorsal; 4) por último, el orificio que citamos al Este de la figura se asemeja a lo que sería la representación de un ojo, en donde la profundidad excavada realzaría la importancia del mismo.

FIGURA Nº 17, LÁMINA XIV

Grabado de formas geométricas en el que dos surcos se entrecruzan a modo de cruz latina; sus vértices se unen a otro surco que rodea todo el contorno, dibujando una silueta acorazonada, dando así una imagen de escudo heráldico. Las distancias mayores son de 22 y 19 centímetros correspondiendo respectivamente a la "altura" y al "ancho". La profundidad del surco es bastante escasa y oscila en torno a los 0,3 centímetros, siendo la máxima excavación de 0,6 centímetros. Por lo que se refiere a la anchura de los canales, ésta gira alrededor de 1 centímetro,

En cuanto a la interpretación de la figura, es posible que los dos surcos que se cruzan sean la esquematización de una figura humana; así, hay que observar un engrosamiento del extremo oriental de la cruz que podría querer indicar la presencia de una cabeza.

Unos 40 centímetros al Este de la figura nº 17 podemos adivinar la presencia de unos surcos apenas perceptibles entrecruzados y rodeados por una estructura más o menos romboidal. Sin embargo, no nos atrevemos a describirlo como un grabado más, pues forma parte de toda una serie de formas presentes en la estación cuyo origen humano o natural resulta en estos momentos ser un tema de muy difícil resolución.

FIGURA Nº 22, LAMINA XV

Nos encontramos con lo que parece ser una combinación de formas naturales con un incipiente grabado; es la que denominamos "depresión central". Frente a la superficie uniforme de la plancha tobácea, destaca en una posición más o menos central una depresión de forma rectangular; sus lados miden 90 x 52 centímetros y su profundidad máxima es de 12 centímetros. Su relieve liso y orillas de suave declive no muestran señal alguna de haber sido sometidas al trabajo del piquetado. En el lado Sur del rectángulo las cosas parecen cambiar; el declive es abrupto a lo largo de un trecho de 75 centímetros y se advierten las huellas de un picado que rebajó la roca; da la impresión de que, aprovechando la existencia previa de una concavidad, se intentó remodelar la misma aunque, quizás, el trabajo no llegó nunca a completarse.

Inmediatamente al Sur de la zona excavada hay una ranura de forma rectangular con medidas de 10 x 3,5 centímetros y con una profundidad de 3-3,5 centímetros. Desconocemos su simbología y si está relacionada con la depresión central o con el antropomorfo nº 6 al cual se encuentra muy cercana.

DESCRIPCIÓN DE LA ESTACIÓN ORIENTAL

Frente a la riqueza en formas y cantidad de grabados de la estación occidental, la oriental, sólo cuenta con dos modelos tipológicos y un número total de cuatro manifestaciones; aunque también es verdad que nos encontramos en un contexto donde la erosión y el recubrimiento sedimentario pueden haber destruido y ocultado otros posibles grabados.

A lo largo de una cornisa de unos 10 metros de largo y menos de un metro de ancho por término medio aparecen dos grupos de grabados. La estación se encuentra en la misma capa de tobas que fue utilizada para los grabados de la estación occidental. La diferencia respecto a aquella localidad está en que aquí, el espacio disponible para los grabados se reduce considerablemente. Las figuras quedan así en el mismo borde del acantilado marino sufriendo más los efectos destructivos de la erosión. En la lámina XVI presentamos un croquis en el que puede observarse cómo los grabados han sido ya parcialmente destruidos o están gravemente amenazados de serlo por el retroceso del escarpe.

Dos son las formas representadas que hemos localizado: soliformes, en número de tres y una acanaladura asociada a cinco microcazoletas.

En los tres soliformes el grabado se logra mediante un surco que se dispone a modo de circunferencia, dejando aislada la roca original en su interior. No es, por tanto, una cazoleta, en las cuales se excava todo el interior del círculo, sino que aquí, sólo se labra el borde exterior del mismo. Uno de los grabados se encuentra aislado mientras que los dos restantes se encuentran separados entre sí por sólo 33 centímetros.

FIGURA N° 23, LÁMINA XVII

Surco grabado por picado, que parece corresponderse aproximadamente con las dos terceras partes de una hipotética circunferencia. El posible tercio restante ha desaparecido como consecuencia de la erosión, que hace retroceder el escarpe sobre cuyo borde se encuentra la figura. El diámetro de la misma es de unos 21 centímetros, siendo la anchura del surco de unos 2-3 centímetros, mientras que su profundidad varía entre 1,5 y 2 centímetros.

FIGURAS N° 24 Y 25, LÁMINA XVII

Parja de grabados de características soliformes como el anterior. Dos surcos trazan sendas circunferencias distanciadas 33 centímetros y orientadas en la alineación 60° NE-E. El diámetro de aquellas es de 12,5-13,5 centímetros la más oriental y de 13-16 la occidental. El ancho del surco está en torno a los 2-3 centímetros para la primera y entre 2-4,5 para la segunda. Las profundidades excavadas son de un valor medio de 1 y 1,5 centímetros respectivamente.

Prescindiendo de las medidas exactas y en líneas generales, se puede afirmar que se han representado dos figuras de características similares en las que no se ha buscado distinción alguna.

Si el soliforme de la figura 23 está parcialmente destruido por la erosión, no sucede lo mismo con las dos presentes. Sin embargo, a medio plazo la conservación de estas dos figuras corre una grave amenaza; el problema reside en que bajo el sector de cornisa en el que se encuentran los grabados se ha elaborado una cueva por erosión química -un tafoni-; la tendencia es que dicha cavidad continúe en aumento, por lo que llegará un momento en que falte de apoyo por la base el fragmento de roca en el que están los soliformes acabará por desprenderse, arrastrando en su caída a las dos figuras.

FIGURA Nº 26, LÁMINA XVIII

A una distancia de 1,30 metros del soliforme de la figura nº 23 hay un surco serpentíneo cuya definición en tanto que obra humana o forma natural plantea bastantes dudas. El surco o grieta tratado se compone de cuatro tramos orientados en disposición zigzagueante y cuyas medidas son de 25, 60, 160 y 40 centímetros. Hemos puesto primero el tramo de 25 centímetros ya que el buzamiento de la plancha de tosca coloca a ese sector en una posición más elevada, situándose los siguientes de forma respectiva en cotas inferiores. La articulación entre el segundo y el tercer segmento del canal está ocupada por un orificio de 3 centímetros de profundidad y un diámetro entre 10 y 7 centímetros; medidas que contrastan con los 3-4 centímetros de ancho y los 1,15 centímetros de profundidad media que tiene el conjunto del surco. En la lámina XVIII hemos localizado con el nº 3 el citado agujero. Con los números 1, 2, 4 y 5 situamos otras cuatro cavidades que flanquean por parejas al canal descrito. Las medidas que presentan estas microcazoletas son, en centímetros, las siguientes: Nº 1, 3,5 de diámetro y 2,5 de profundidad; Nº 2, 7 de diámetro y 3 de profundidad; Nº 4, 7 de diámetro y 3 de profundidad; Nº 5, 7 de diámetro y 2 de profundidad.

El grabado en su conjunto -canal más microcazoletas- parece encontrarse intacto; a pesar de encontrarse en algunos puntos a tan sólo 12 centímetros del borde del acantilado no corre un peligro inmediato. Al igual que en otros grabados, hay sectores donde la figura se pierde imperceptiblemente, haciéndose muy difícil precisar los límites exactos del surco; este fenómeno se da en este caso en el extremo occidental de la figura y que hemos localizado con la letra "B" en la lámina XVIII.

Teniendo en cuenta la inclinación de la superficie sobre la que se encuentra el grabado, cabe la posibilidad de que éste hubiera servido para que a través de él circulase algún líquido. Así, si se vertiera un fluido en el extremo occidental del surco, ("A" en la lámina XVIII), discurriría por el canal hasta llegar a la microcazoleta nº 3, colmatándola y prosiguiendo su descenso hacia el sector occidental del canal.

CONSTRUCCIONES

En una posición intermedia entre las dos estaciones de grabados y a unos 30-40 metros de las mismas, aparecen los restos de una serie de construcciones. El carácter aborigen o no de estas ruinas es bastante incierto; por otra parte, un estudio en profundidad de éstas excede de nuestras posibilidades. Por ello, nos hemos limitado a

realizar un croquis y una descripción somera de aquellas que ayude a futuras investigaciones.

El contexto en el que aparecen los muros es el de un pedregal formado por cantos en torno a los 30-40 centímetros de diámetro; tan sólo en el sector comprendido entre las construcciones 4, 5 y 6 (véase lámina XIX) hay algo de suelo susceptible de aprovechamiento agrícola. Toda la zona tiene un importante grado de recubrimiento vegetal que en ocasiones dificulta la localización de los restos.

En la superficie no hemos observado la presencia de restos cerámicos, frecuentes en donde existen plantas de cabañas prehispánicas; únicamente hemos visto algunos trozos de lapas (*Patella sp.*) de aspecto antiguo.

Con el nº 1 hemos señalado la construcción más occidental del conjunto. Se trata de un muro semicircular a base de grandes piedras con dimensiones de unos 40 centímetros de diámetro; que se adosa a una gran roca de 3,40 metros de largo por 2,80 metros de alto. Se aprovecha así el abrigo de esta última, quedando un espacio intermedio de 1,40 metros de ancho por 3 metros de largo susceptible de utilización. En el extremo Norte parece adivinarse el hueco de la entrada al recinto; éste tiene una altura media de 50 centímetros. El interior del mismo está lleno de piedras con apariencia de haber sido en su día más profundo que en la actualidad.

El número 2 se corresponde con una construcción de planta semicircular abierta al Este y formada por una hilera de grandes piedras, (40-50 centímetros de diámetro). Tiene unos 3 metros de lado mayor, por 1,40-2,40 de ancho. En su sector Este parece continuarse en esa dirección, pero la presencia de un gran ejemplar de "cardón" (*Euphorbia canariensis*) impide confirmar esta posibilidad.

El número 3 es un muro con piedras de tamaño y disposición similares al anterior, que aparece a lo largo de unos 2-3 metros al Este del citado cardón. Pensamos que posiblemente sea la continuación del muro anterior.

Con el número 4 designamos una estructura de planta romboidal con lados de poco menos de 2 metros. La parte externa está hecha con piedras de dimensiones que oscilan entre los 20 y los 30 centímetros de diámetro; el interior está lleno de piedras pequeñas (5 centímetros de diámetro); la altura visible de la construcción es de unos 85 centímetros, contándose hasta 4 hileras de piedras superpuestas.

El número 5 corresponde a un muro formado por grandes piedras de 30-40 centímetros de diámetro, tras las que se apoyan otras piedras más pequeñas; la longitud es de unos 8 metros y la altura varía en torno a los 60-80 centímetros. Dado que el terreno está inclinado en sentido descendente hacia el Norte, el muro sigue también ese buzamiento.

El último muro es el número 6, que repite los elementos constructivos del anterior del que lo separa poco más de 4 metros; se extiende a lo largo de 6 metros y tiene una altura que oscila entre 80 centímetros y 1,10 metros; su disposición es Oeste-Este y sigue las curvas de nivel, por lo que carece de la inclinación del número 6.

Con los datos que hemos enumerado hasta ahora resulta muy difícil interpretar la finalidad de estos restos; tan sólo podemos hacer algunas consideraciones.

1.- Si ha existido aprovechamiento agrícola en el lugar, sólo puede haberse realizado en el espacio comprendido entre las construcciones 4, 5 y 6; el resto, dado el carácter muy pedregoso que posee, sólo puede acoger, como de hecho sucede, árboles frutales, en este caso higueras (*Ficus carica*).

2.- Los muros 1 y 2 pueden haber servido únicamente para refugio de personas o de animales.

3.- Los muros 5 y 6 no sirven para retener detrás de ellos suelo agrícola, pues solamente hay pedregales, sino que parecen limitar un recinto interior frente al exterior (¿corral para ganado?).

4.- La utilización humana tiene que haber cesado como mínimo hace varias décadas; la existencia de un ejemplar importante de cardón, con crecimiento lento en un medio árido, se corresponde además con una fase muy avanzada de recolonización vegetal; por otra parte, teniendo en cuenta su carácter tóxico, difícilmente hubiera sido compatible su presencia en un corral de ganado, por lo que tiene que ser posterior al abandono del recinto.

5.- La construcción número 4 se asemeja a los discutidos "molleros"; quizás sirvió para limpiar el terreno situado inmediatamente al Sur del mismo para su utilización agrícola. También se puede argumentar que está en el mismo borde de un acantilado (al Norte de la construcción) por lo que podrían haberse tirado por el mismo las piedras que dificultaban el cultivo, ahorrándose así el trabajo de construir aquella estructura.

INTERPRETACIÓN DEL YACIMIENTO

El posible centro ceremonial de "La Pedrera" se encuentra enclavado en un punto muy escarpado, de difícil acceso y al pie de un roque que da señas de identidad al paisaje circundante. En el ámbito canario, así como en el Norte de África, existen abundantes referencias bibliográficas en el sentido de que son este tipo de localidades las elegidas para emplazar en ellas los lugares de culto. "La montaña es, entre los bereberes, el lugar que sirve de intermediario entre la tierra y el cielo, sirviéndose de ella para la realización de ritos propiciatorios: en unos casos derramando leche, mantequilla, etc., y, en ocasiones, como lugar sagrado en sí mismo." (TEJERA y GONZÁLEZ, 1987: 152)

Prácticamente todas las islas cuentan con lugares de estas características; en Fuerteventura contamos con los grabados podomorfos de la montaña de Tindaya, en Gran Canaria está el "Almogarén" del Bentayga, en La Palma el roque Idafe, Garajonay y La Fortaleza pueden haber tenido un fin similar en La Gomera, El Hierro cuenta con "Los santillos de los antiguos" y en Tenerife ya conocíamos la "quesera" de Masca.

La elección del lugar, por tanto, no resulta casual; se busca la cercanía de lugares eminentes, de difícil orografía, a ser posible roques puntiagudos. El problema estriba en saber cuál es el exacto papel que cumplen esas montañas. Dos son las interpretaciones que se dan a la existencia de centros cultuales en las montañas o roques canarios; para unos, el roque "viene a ser un símbolo de unión entre el cielo y la tierra,

considerado como el eje que sostiene los dos niveles "(TEJERA y GONZÁLEZ, 1987: 73): es la concepción del "Axis mundi", idea evidente entre los antiguos palmeros — recuérdese las imprecaciones para que Idase no cayera — y posible entre los guanches, (véase TEJERA, 1988: 21). La segunda teoría vincula las montañas afiladas con una simbología sexual: el roque sería un símbolo fálico propiciador de la fecundidad femenina a cuyo culto se dedica el lugar. Este sería el caso del Bentayga en Gran Canaria (TEJERA y JIMÉNEZ, 1988: 13)

La similitud con otras islas no es solamente del contexto general; las distintas formas que aparecen en "La Pedrera" repiten la tipología de otras localidades del archipiélago que han sido interpretadas por sus autores como centros de culto a la fecundidad. Para una mejor comprensión hemos elaborado la siguiente serie:

1.- CAZOLETAS. En el "Almogarén" del Bentayga, Gran Canaria, existen depresiones en la roca que han sido denominadas "cazoletas" (TEJERA, JIMÉNEZ, 1988: 13). En Lanzarote también se han citado la existencia de cazoletas ligadas a yacimientos aborígenes (BALBÍN y otros 1987: 34).

2.- ANTROPOMORFOS FEMENINOS. Igualmente, en el "Almogarén" del Bentayga existe una figura femenina esquematizada (JIMÉNEZ, 1988: 84) y que aparece también en otras manifestaciones culturales de Gran Canaria tales como las estatuillas tipo "Idolo de Tara".

3.- ANTROPOMORFOS MASCULINOS Y/O ASEXUADOS. Los antropomorfos de "La Pedrera" no incluibles en el grupo de los antropomorfos femeninos recuerdan bastante a los grabados del Barranco de Balos en Gran Canaria o a los de ciertos lugares de La Palma. Detalles como brazos acodados hacia abajo o hacia arriba parecen no ser tan arbitrarios y pueden tener algún significado desconocido para nosotros.

4.- ZOOMORFOS. La presencia de un grabado cuyas formas recuerdan a la esquematización de un pez nos lleva a relacionarlo con los supuestos peces que Antonio Tejera ha creído ver en "La quesera de Masca", y que se asocian a una simbología masculina, al relacionarlos con el pene, en el ámbito cultural paleobereber (TEJERA, 1988: 15).

5.- ACANALADURAS. El canal zigzagueante que señalamos en la estación oriental de "La Pedrera" recuerda a los descritos para el Bentayga de Gran Canaria, aunque, eso sí, de menores dimensiones en cuanto a profundidad y anchura; lo que no elimina la posibilidad de que tuvieran idénticas funciones.

6.- SOLIFORMES Y/O LUNIFORMES. Las representaciones rupestres a modo de circunferencias o círculos grabados en la roca aparecen en el Bentayga en Gran Canaria (TEJERA, JIMÉNEZ, 1988: 13) y en Masca, Tenerife (TEJERA, 1988: 14), interpretándolos respectivamente estos autores como símbolos lunares y solares. En "La Pedrera" aparecen en la estación oriental, justo en la parte del yacimiento que da al Sol naciente.

7.- FIGURAS BISEXUADAS. TEJERA y JIMÉNEZ (1988: 12) citan la existencia de esculturillas bisexuadas en Gran Canaria, que podrían estar relacionados con ideas de fecundación semejantes a los andróginos de otras culturas. La figura a la que hemos asignado el número 3 podría cumplir ese papel; por una parte, la esteatopigia sería

indicio de embarazo femenino, mientras que el canal grabado en la parte inferior de la figura podría no ser una vagina sino una representación fálica, con lo que los dos sexos quedarían unidos en un único cuerpo.

La lectura de las fuentes históricas nos aportan una valiosa información; así, son numerosas las referencias que se pueden recoger en las crónicas contemporáneas o inmediatas a la conquista respecto a las costumbres religiosas de los aborígenes canarios en lo que se refiere a una serie de elementos básicos: 1.- lugares eminentes, 2.- ofrendas rituales, 3.- culto solar; lo único que no se menciona en las crónicas es la existencia de grabados, aunque hay que tener en cuenta que aquellas no son estudios sistemáticos sino que se limitan a ofrecer una visión superficial de lo más llamativo para sus autores. Así, Abreu Galindo decía, refiriéndose a Gran Canaria, que "iban a las montañas y allí derramaban la manteca y la leche y cantaban endechas en torno a un peñasco...", (ABREU GALINDO, 1977: 157). En otra de las citas que hemos escogido podemos leer que los aborígenes "adoraban al Sol naciente sin conocer otro culto..." (IBN JALDUN en SERRA, 1941: 204). En un sentido estricto, estas citas no se refieren en concreto a la isla de Tenerife sino a otras islas, o bien son referencias al conjunto del archipiélago sin especificar localidad. Sin embargo, pensamos que es posible extrapolar con cierta prudencia determinadas manifestaciones culturales de unas islas a otras, pues la idea de unas islas con formas de vida totalmente diferentes resulta, a estas alturas, bastante discutible, prefiriendo por nuestra parte hablar de diferencias relativas dentro de un horizonte cultural común.

Si pasamos al campo del estudio de las culturas bereberes podemos constatar que en muchas de ellas, "el Sol se asocia a un principio femenino" (TEJERA, 1988: 14); que, también, "en la Kabilia bereber, las mujeres realizaban ritos a la divinidad para conseguir la fertilidad como beneficio solicitado" (TEJERA, 1988: 25). Es decir, Sol y fecundidad parecen estar íntimamente relacionados y éstos son elementos que parecen estar representados en los grabados del yacimiento estudiado.

En conclusión, creemos estar ante lo que podría tratarse de un centro de culto a la fecundidad femenina entre los aborígenes de la isla de Tenerife. En él se confirma la presencia de grabados antropomorfos para esta isla, dato que era discutible hasta este momento, y se aportan evidencias de posibles paralelismos culturales con el resto de las islas.

BIBLIOGRAFIA

- ABREU GALINDO, Juan de: *Historia de la conquista de las siete islas de Canaria*, Goya ed., Santa Cruz de Tenerife, 1977.
- BALBIN BEHRMANN, Rodrigo de, FERNANDEZ MIRANDA, Manuel, y TEJERA GASPAR, Antonio: "Lanzarote prehispánico. Notas para su estudio", en *XVIII Congreso nacional de arqueología*, Zaragoza, 1987.
- BELTRÁN MARTÍNEZ, A.: *Los grabados rupestres del Barranco de Balos*, Las Palmas, 1971.
- CARRACEDO, Juan Carlos: *Paleomagnetismo e historia volcánica de Tenerife*, Aula de Cultura de Tenerife, 1979.
- CRIADO HERNÁNDEZ, Constantino: *Los paisajes naturales del macizo de Anaga*, memoria de licenciatura inédita, Departamento de Geografía, Universidad de La Laguna, 1981.
- HERNÁNDEZ PÉREZ, Mauro S.: "Pinturas y grabados rupestres en el archipiélago canario", en *Historia general de las Islas Canarias*, tomo I, Edirca, Las Palmas, 1975.
- HERNÁNDEZ PÉREZ, Mauro S.: "Las representaciones antropomorfas en los grabados rupestres del archipiélago canario", en *Tabona*, nº 3 1975-76.
- HERNANDEZ PEREZ, Mauro S.: *Grabados rupestres del archipiélago canario*, colección guagua, Mancomunidad de Cabildos de Las Palmas, 1981.
- JIMÉNEZ GONZÁLEZ, J. J.: "Un centro cultural en Bentayga, Tejeda (Gran Canaria)", en *Investigaciones arqueológicas en Canarias*, I, 1988.
- JIMÉNEZ GONZÁLEZ, J. J.: "Elementos astrales en la arqueología prehistórica de las Islas Canarias", en *Investigaciones arqueológicas en Canarias*, II, 1990.
- MARZOL JAEN, Victoria: *La lluvia, un recurso natural para Canarias*, Caja general de ahorros de Canarias, Santa Cruz de Tenerife, 1988.
- SERRA RAFOLS, Elías: "Los mallorquines en Canarias", en *Revista de Historia Canaria*, nº 54, La Laguna, 1941.
- TEJERA GASPAR, Antonio y GONZÁLEZ ANTÓN, Rafael: *Las culturas aborígenes canarias*, editorial interinsular canaria, Santa Cruz de Tenerife, 1987.
- TEJERA GASPAR, Antonio y JIMÉNEZ GONZÁLEZ, J. J.: "Ritos de fecundidad en la prehistoria de Gran Canaria", en *Aguayro*, nº 176, marzo-abril de 1988.
- TEJERA GASPAR, Antonio: *La religión de los guanches*, Caja general de ahorros de Canarias, Santa Cruz de Tenerife, 1988.
- VALENCIA, Vicente y OROPESA, Tomás: *Grabados rupestres de Canarias*, Viceconsejería de Cultura y Deportes, Gobierno de Canarias, 1990.

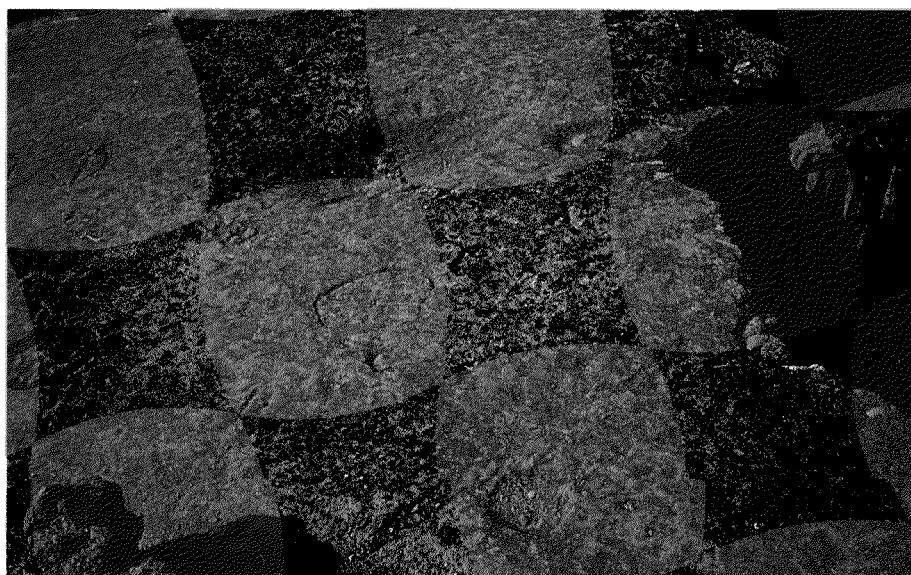
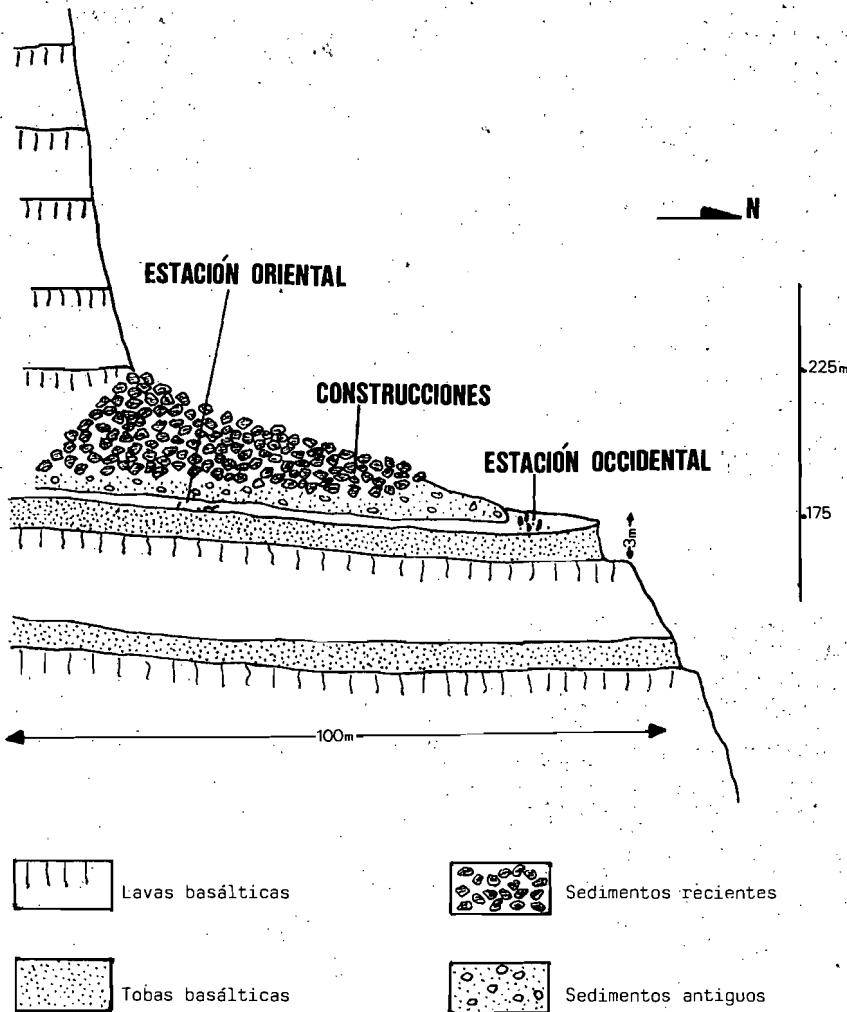


Foto 1. Vista parcial de la estación occidental. En el sector derecho se puede observar cómo el escarpe ha destruido parcialmente algunos grabados.
(Autor: Benito Darias Delgado)



Foto 2. Vista parcial de la estación occidental. En primer plano antropomorfo femenino. Al fondo, posible pisciforme.
(Autor: Benito Darias Delgado)

LÁMINA I



Esquema de la localización del conjunto arqueológico. Las dos estaciones de grabados se sitúan sobre una plataforma semihorizontal de tosca y en el borde de un acantilado marino. Entre ambas se encuentra un depósito sedimentario en el que aparecen muros de origen desconocido.

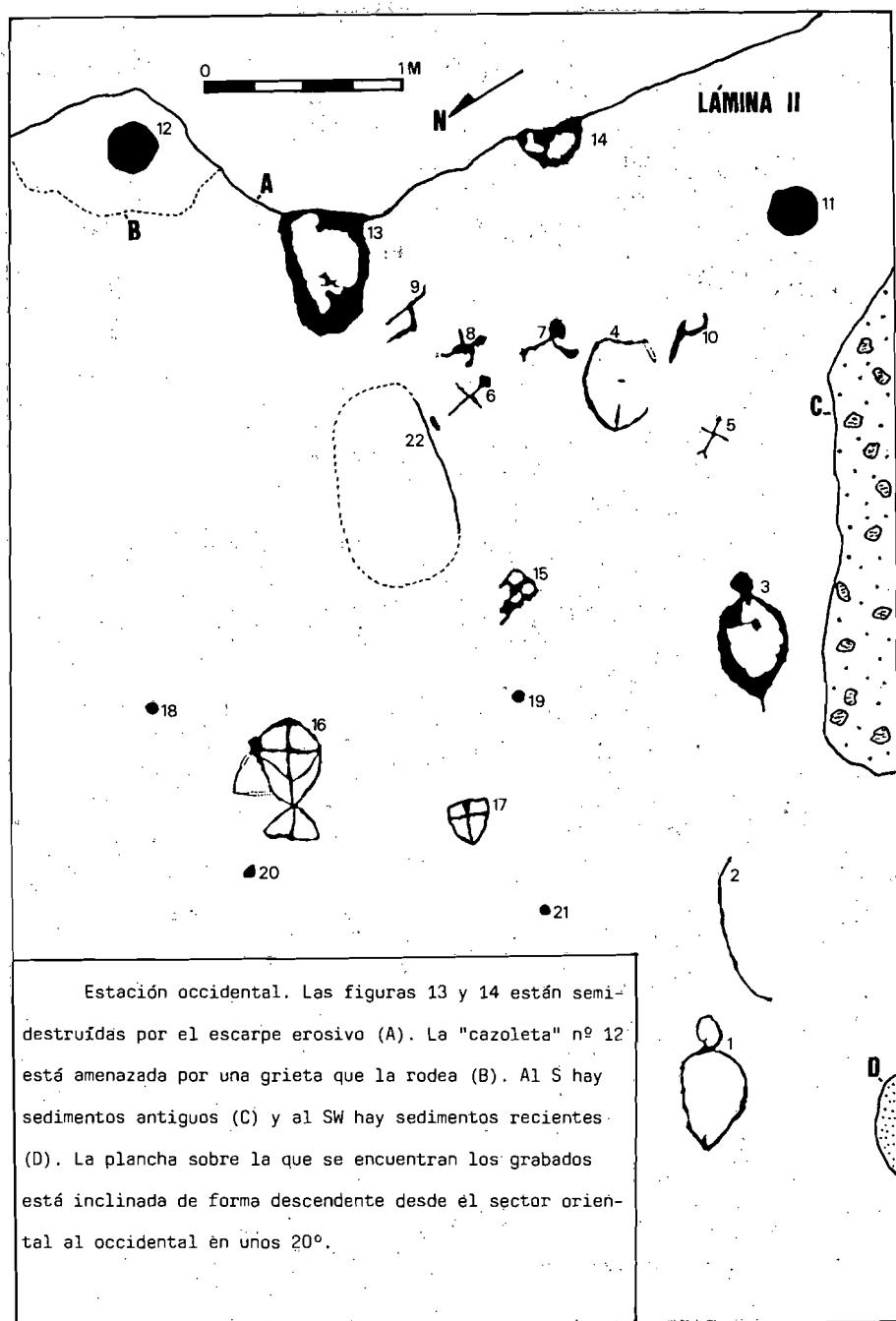


LÁMINA III

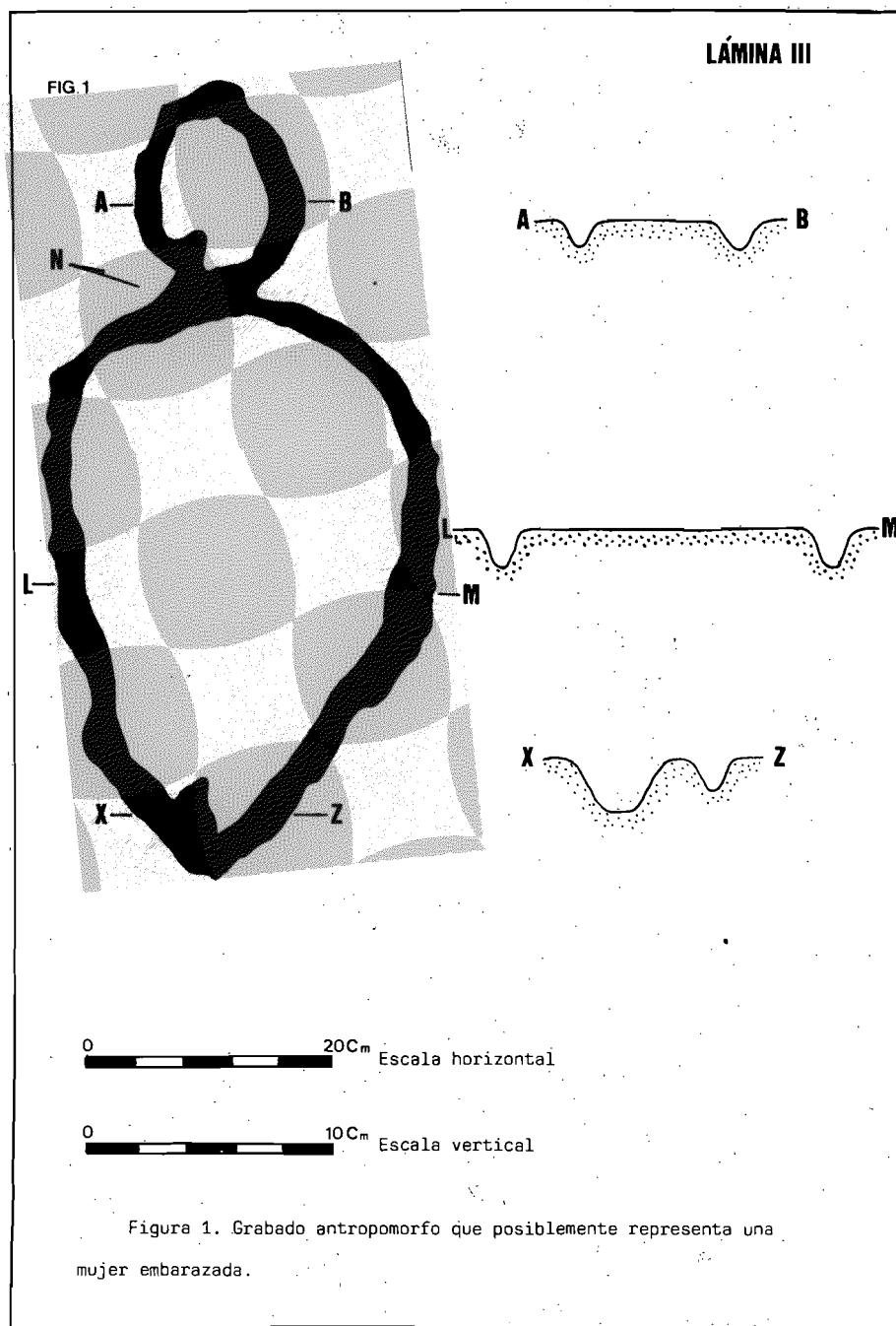


LÁMINA IV

FIG. 2

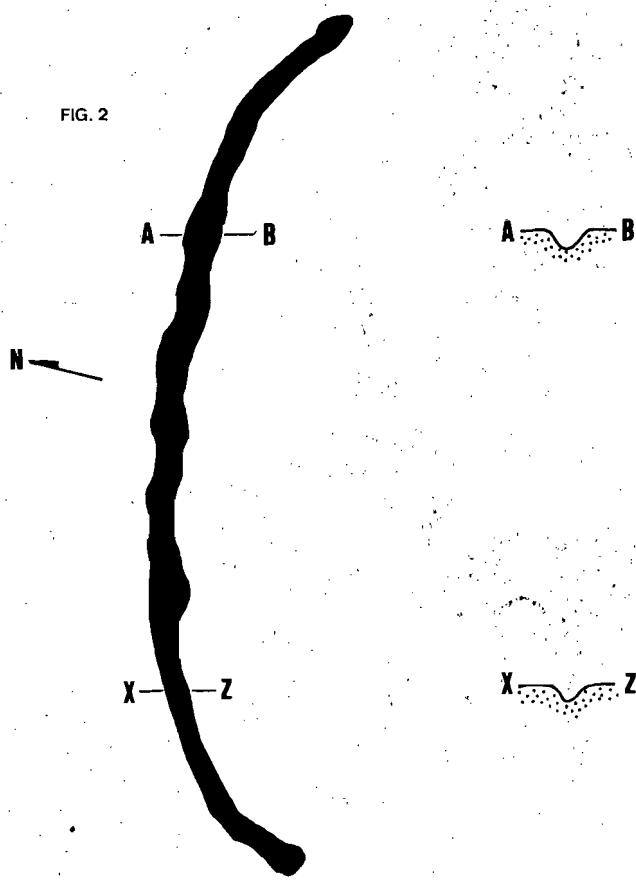


Figura 2. Grabado en "media luna" que podria tratarse de un antropomorfo femenino inacabado, similar a los de las figuras 1,3 y 4.

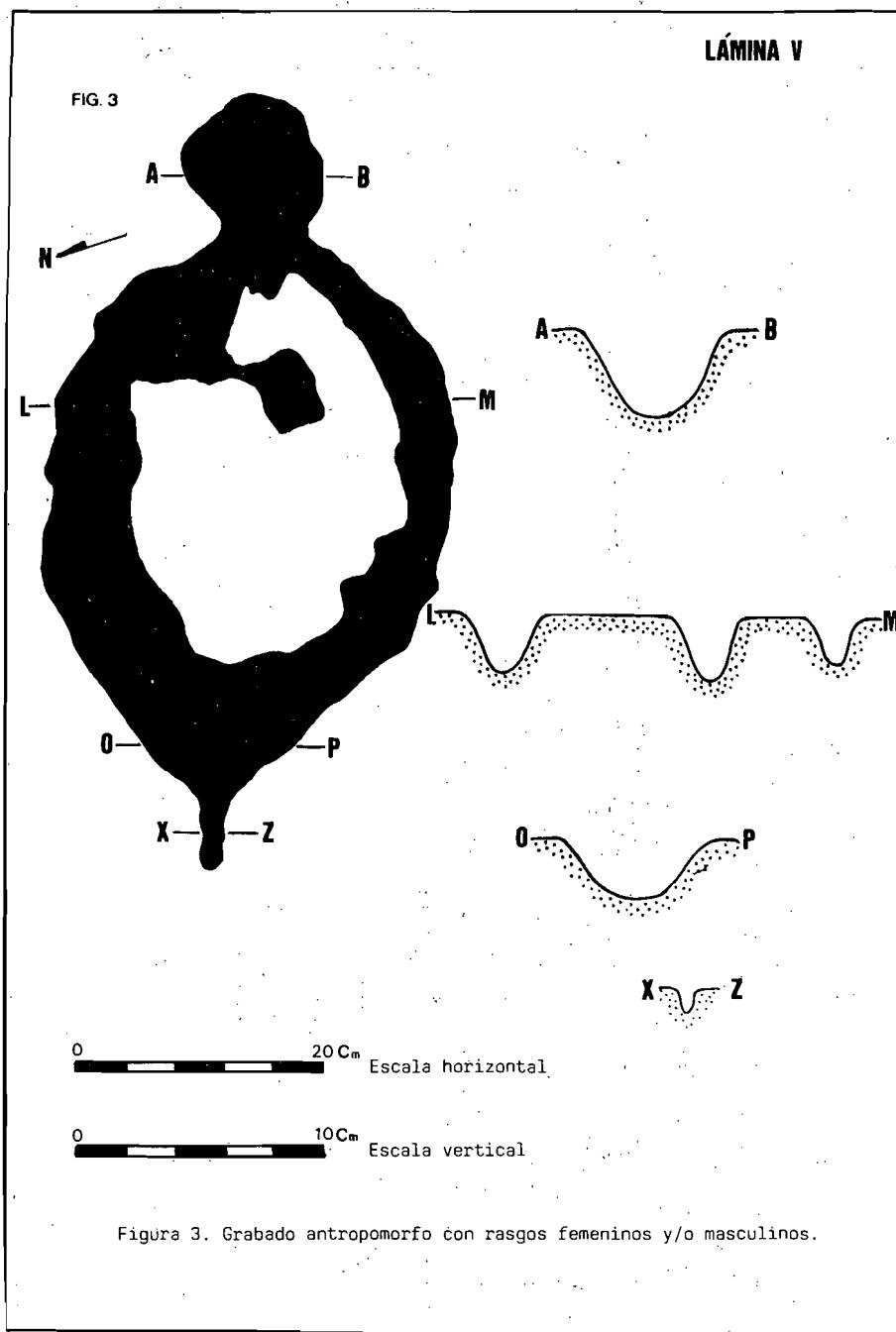


LÁMINA VI

FIG. 4

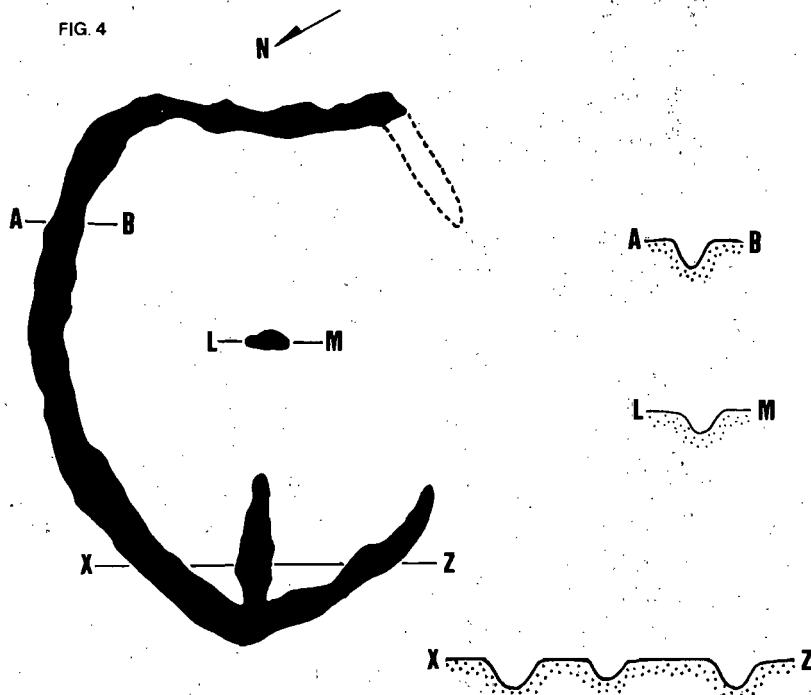
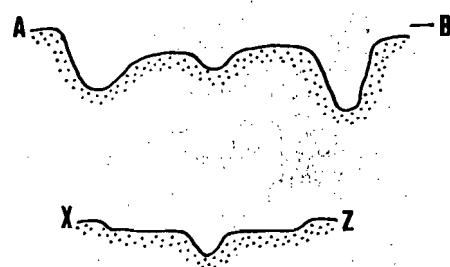
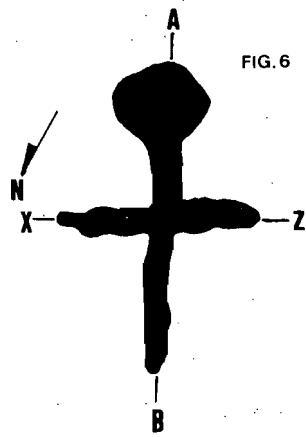
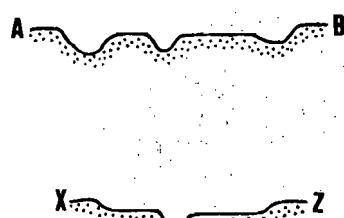
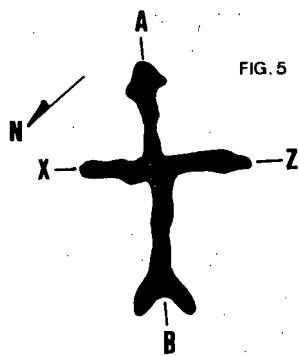


Figura 4. Grabado que posiblemente se trate de un antropomorfo femenino inacabado. La línea a trazos indica zonas difusas del grabado.

LÁMINA VII



0 20 Cm Escala horizontal

0 10 Cm Escala vertical

Figuras 5 y 6. Posibles antropomorfos asexuados.

LÁMINA VIII

FIG. 7

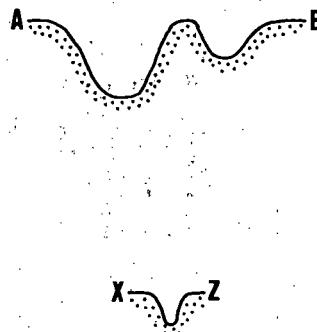
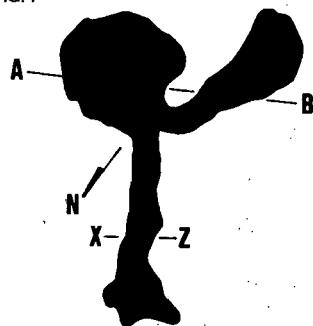
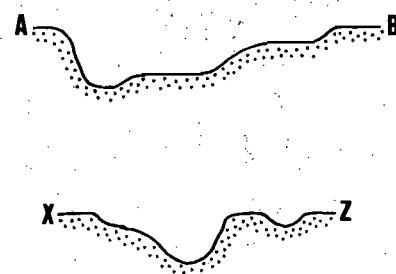
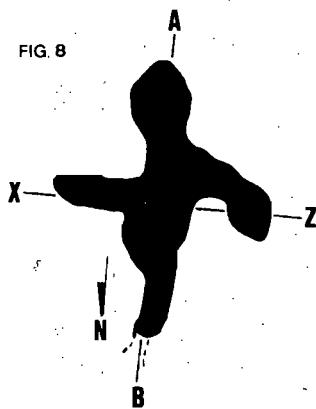


FIG. 8



0 20 Cm Escala horizontal

0 10 Cm Escala vertical

Figuras 7 y 8. Posibles grabados antropomorfos muy esquematisados.
Los trazos al N de la figura 8 indican un sector difuso.

LÁMINA IX

FIG. 9

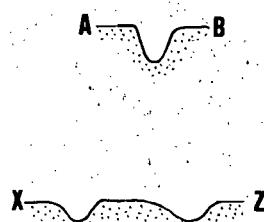
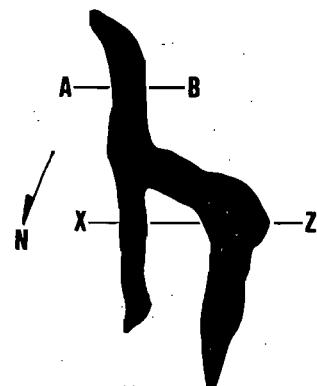
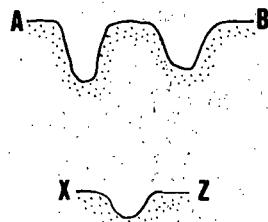
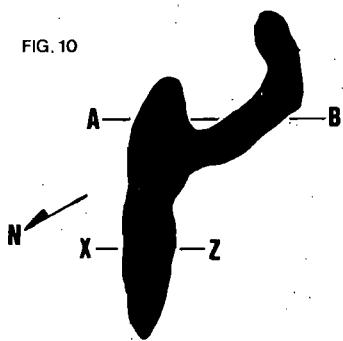


FIG. 10



0 20Cm Escala horizontal

0 10Cm Escala vertical

Figuras 9 y 10. Grabados de significado desconocido. El número 10 podría tratarse de un antropomorfo muy esquematisado o inacabado.

LÁMINA X

N

A

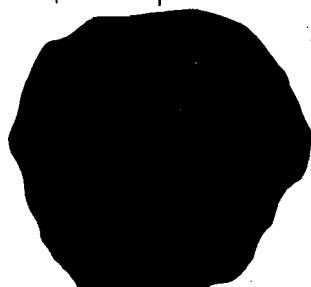


FIG. 11

N

A

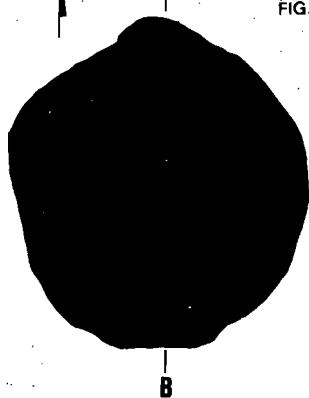
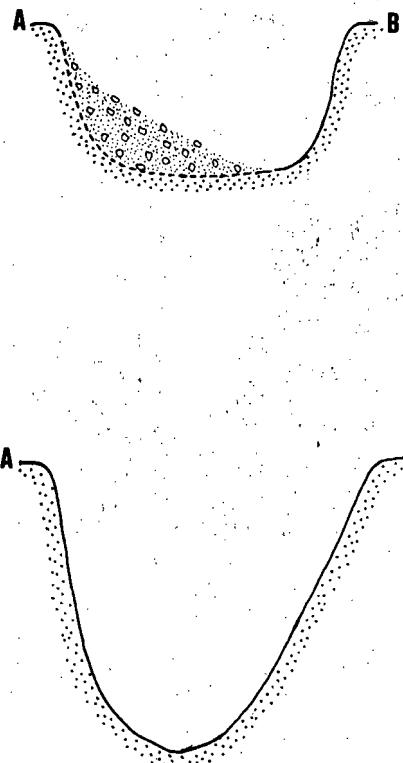
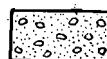


FIG. 12



0 20 Cm Escala horizontal

0 10 Cm Escala vertical



Sedimentos

Figuras 11 y 12. "Cazoletas"

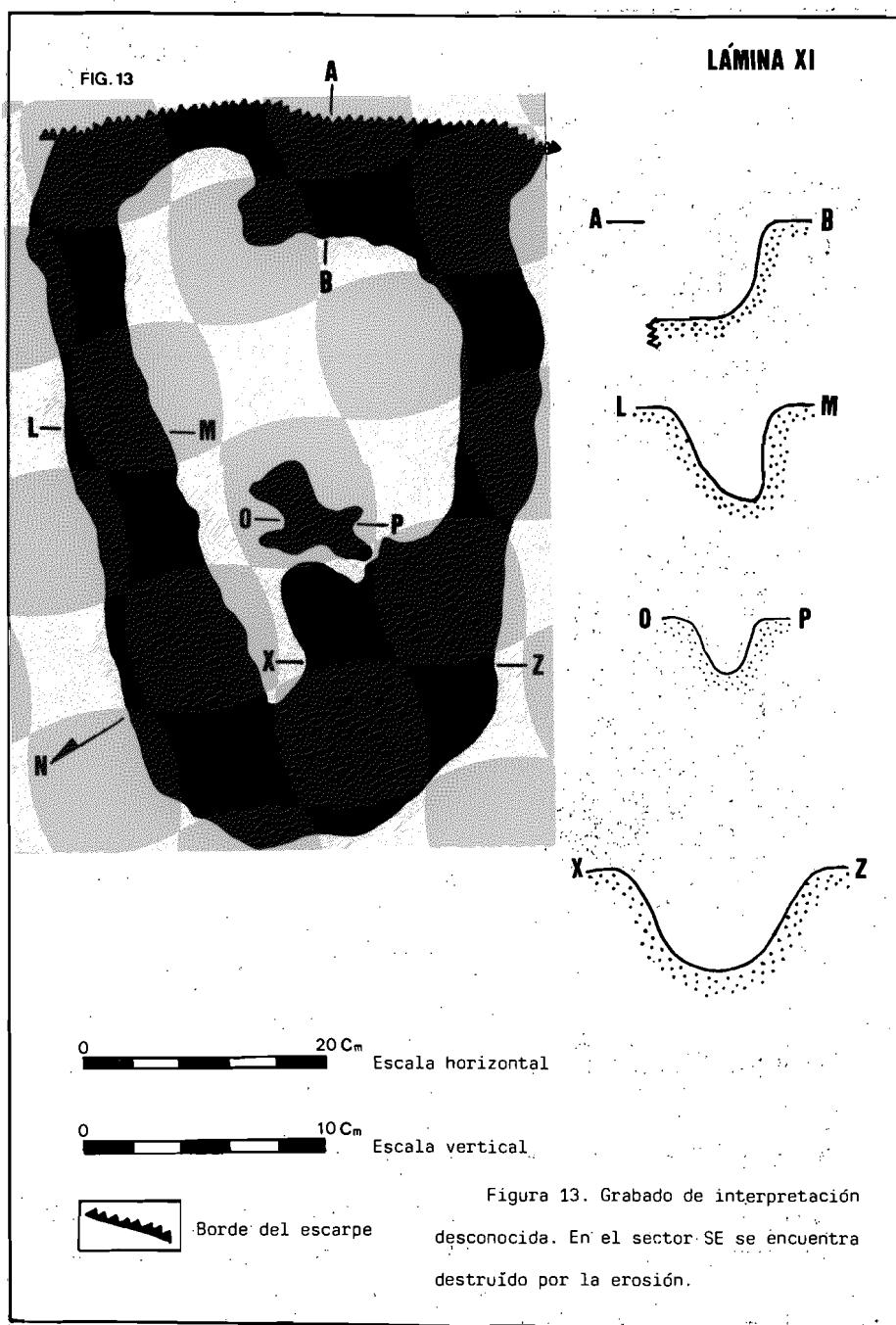
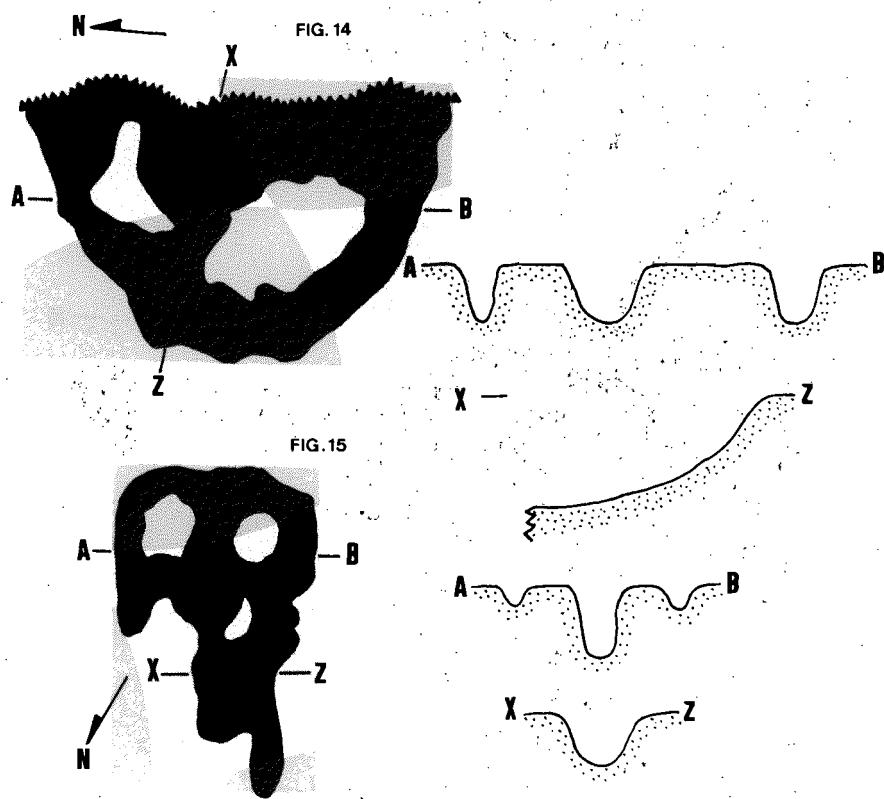
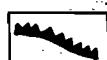


LÁMINA XII



0 20Cm Escala horizontal

0 10Cm Escala vertical



Figuras 14 y 15. Grabados de interpretación desconocida. El número 14 está semidestruido por la erosión.

LÁMINA XIII

FIG. 16

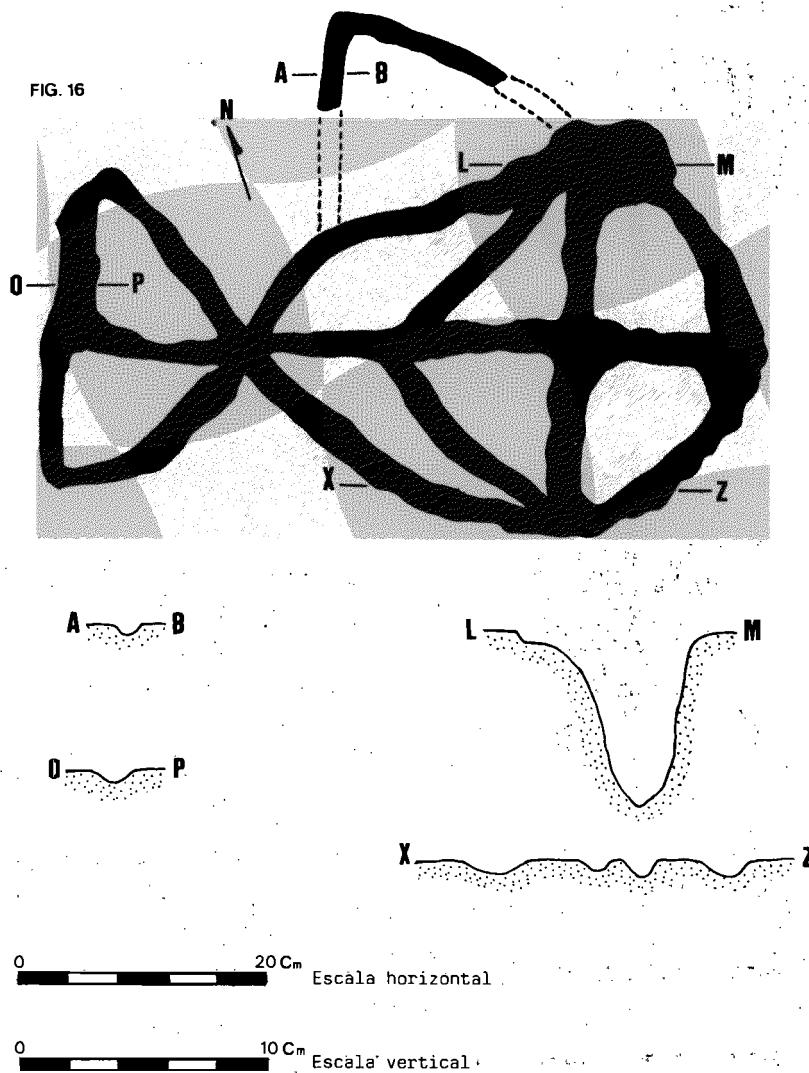


Figura 16. Grabado de posible simbología pisciforme. Las líneas a trazos indican los sectores donde el grabado se hace difuso.

LÁMINA XIV

FIG. 17

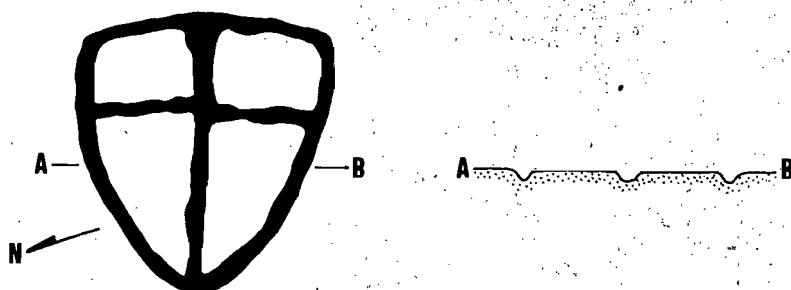


FIG. 18



FIG. 19



FIG. 20

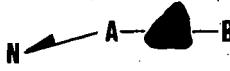
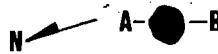


FIG. 21



0 20 Cm Escala horizontal

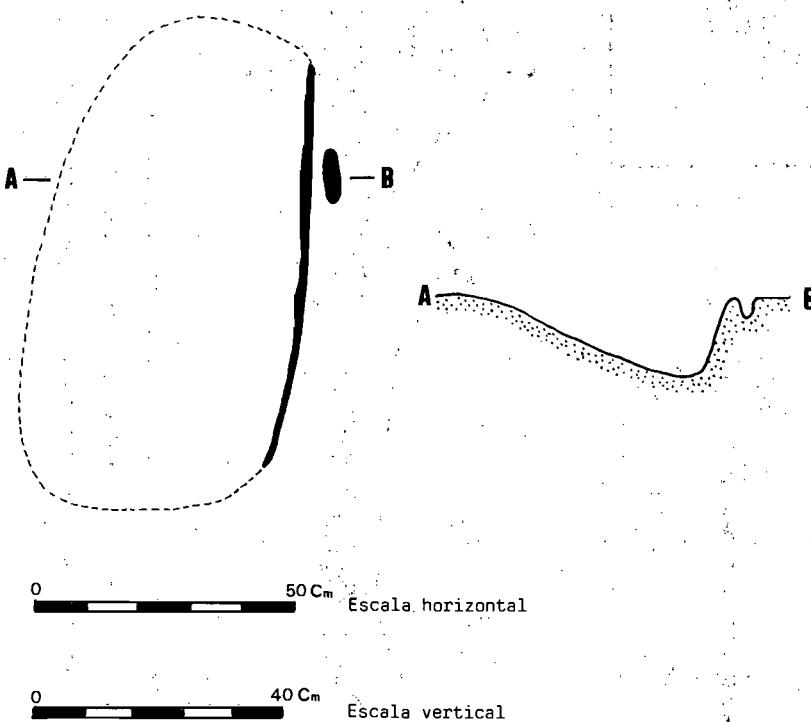
0 10 Cm Escala vertical

Grabado geométrico y microcazoletas.

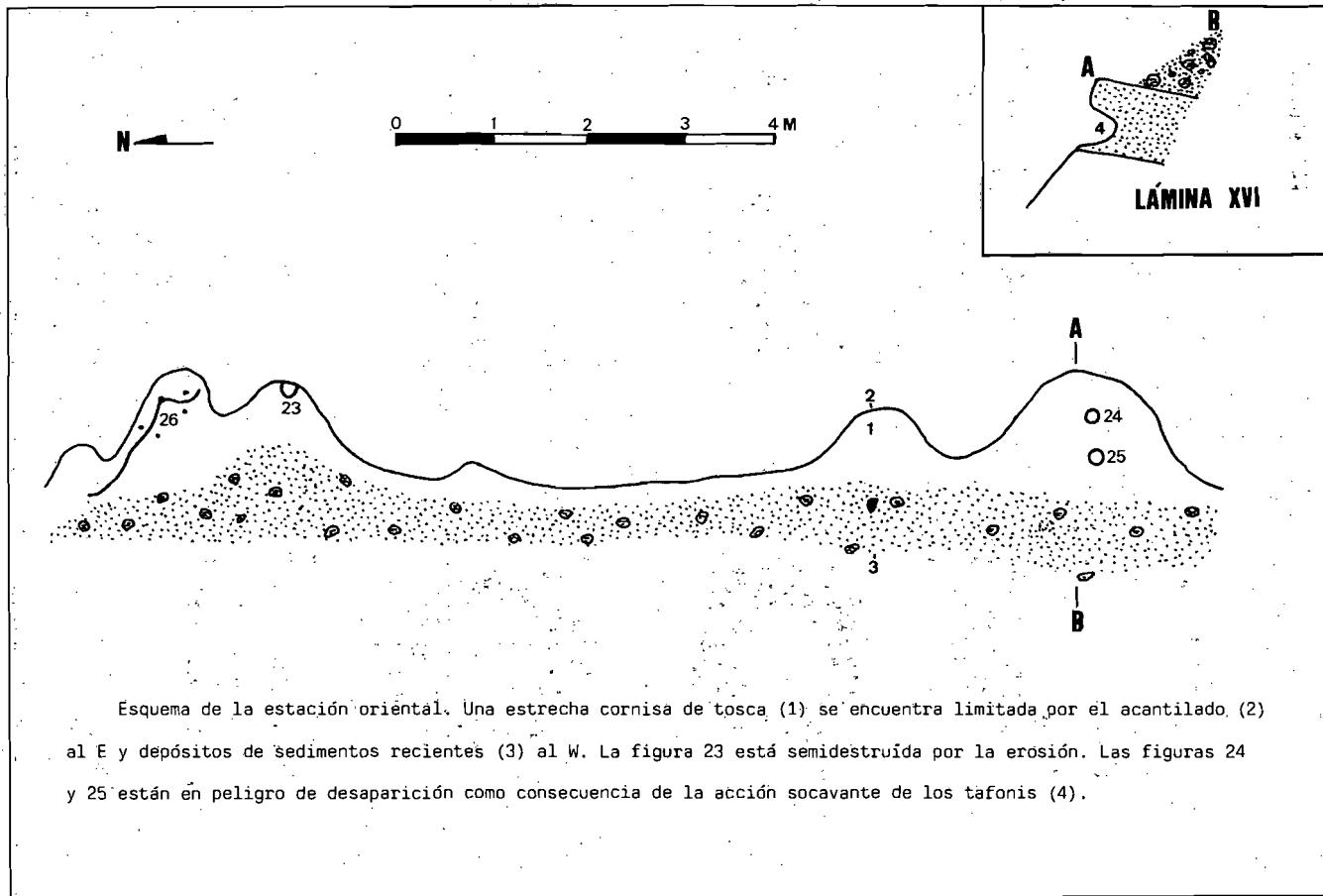
LÁMINA XV

N

FIG. 22



Esquema de la "depresión central". La parte trabajada por el hombre es el borde S de la misma; el resto de la excavación parece ser natural. Más al S hay una ranura con huellas de picado.



Esquema de la estación oriental. Una estrecha cornisa de tosca (1) se encuentra limitada por el acantilado (2) al E y depósitos de sedimentos recientes (3) al W. La figura 23 está semidestruida por la erosión. Las figuras 24 y 25 están en peligro de desaparición como consecuencia de la acción socavante de los tafonis (4).

LÁMINA XVII

FIG. 23

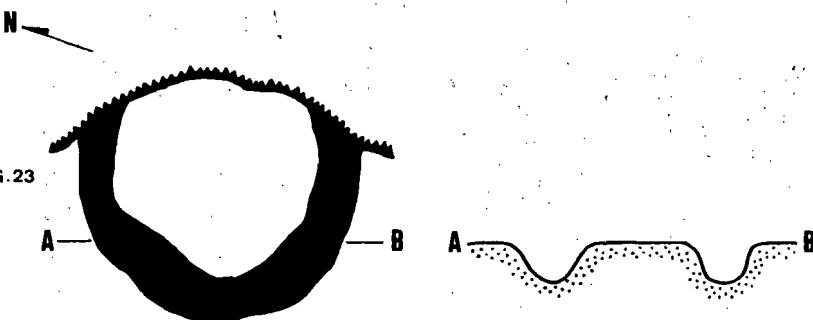


FIG. 24

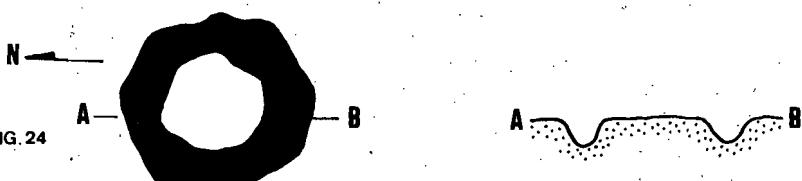
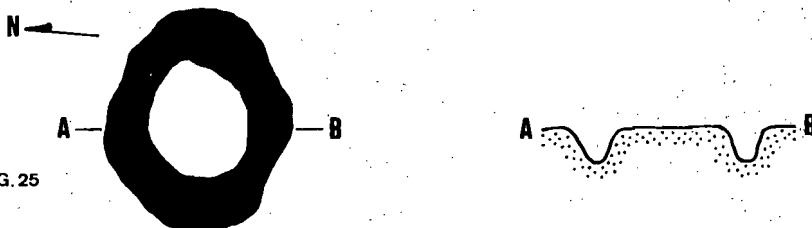


FIG. 25



0 20 Cm Escala horizontal

0 10 Cm Escala vertical



Borde del escarpe

Figuras 18, 19 y 20. Posibles grabados soliformes. El grabado número 18 está semi-destruido por la erosión.

LÁMINA XVIII

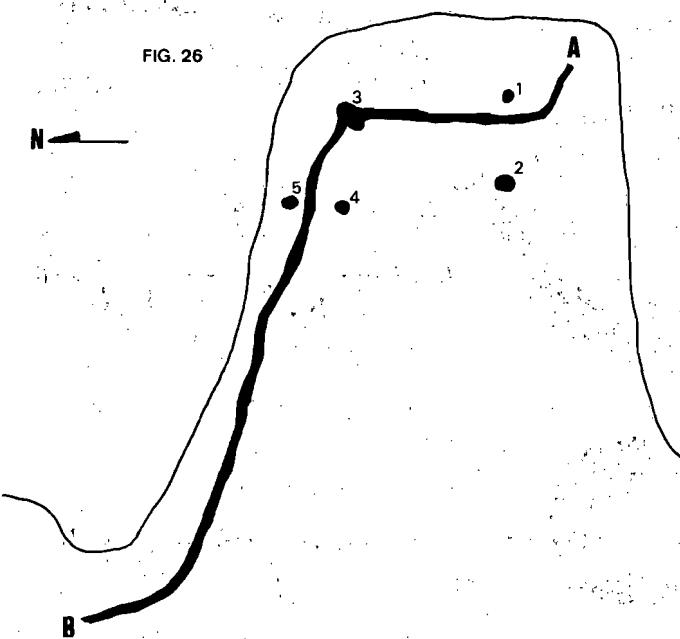
FIG. 26

N

A

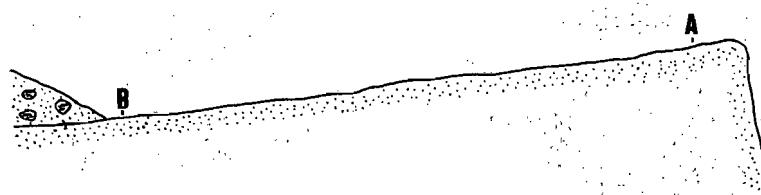
1 M

0

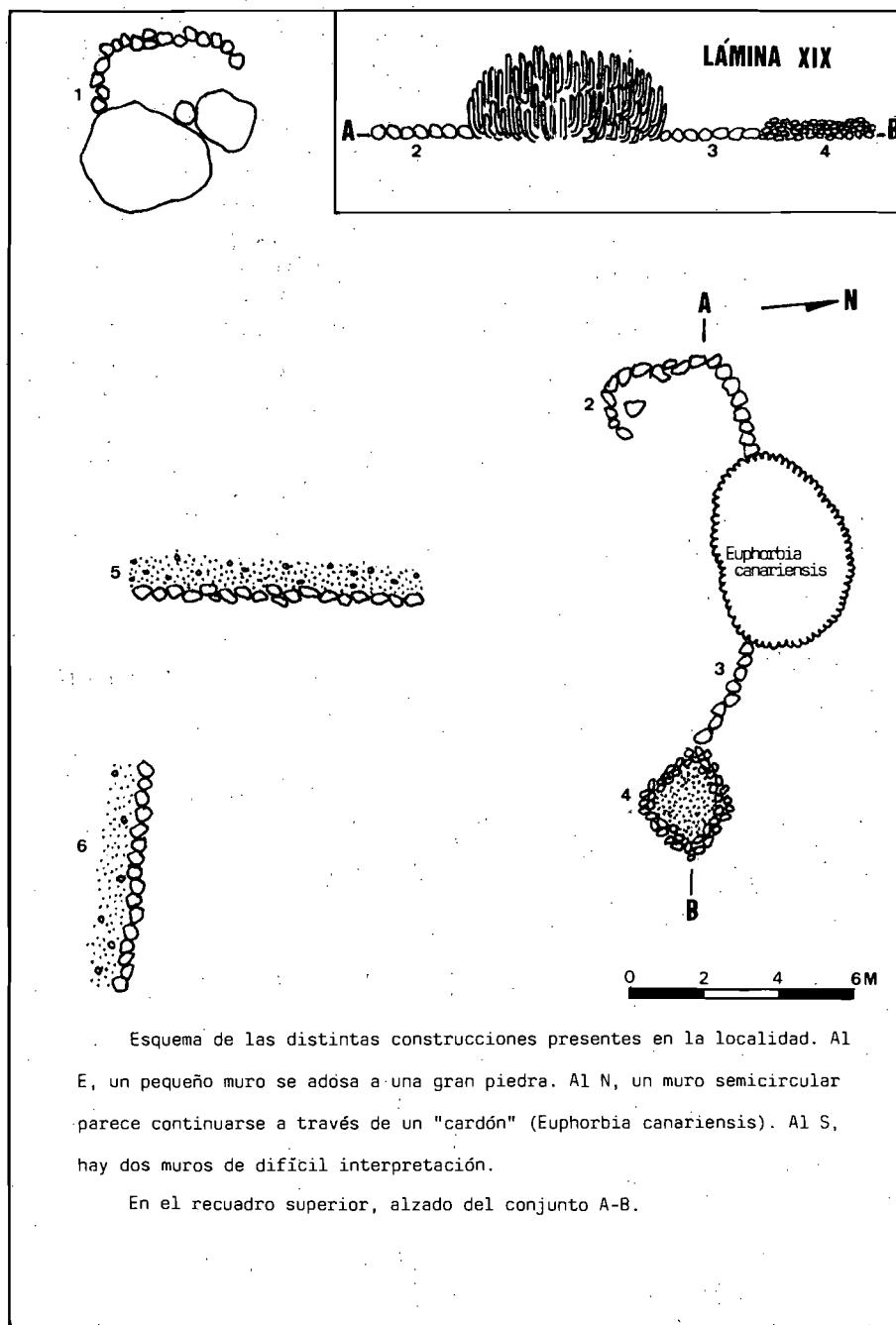


A

B

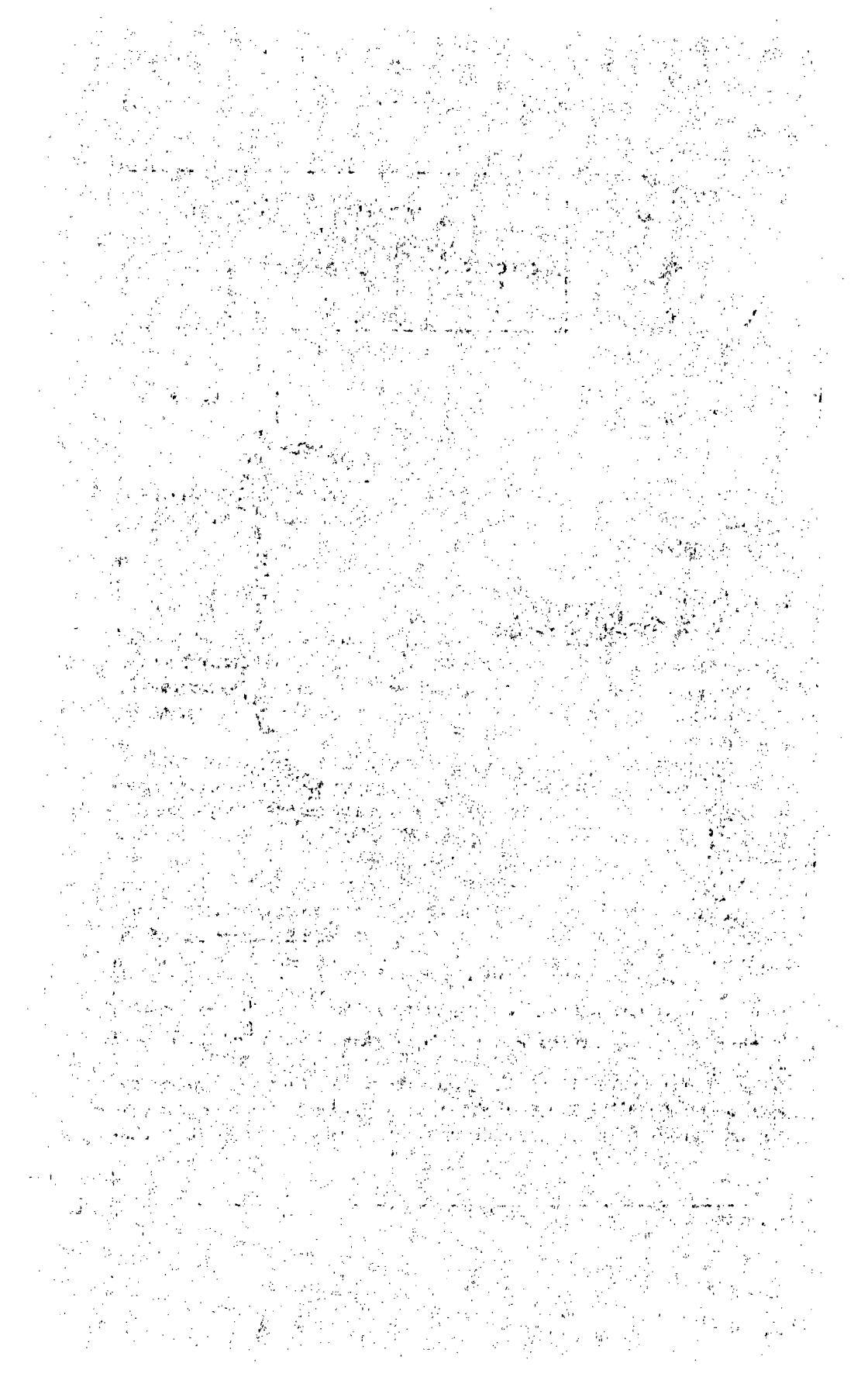


Possible canal con cazoletas asociadas. Una de éstas se encuentra dentro de la acanaladura y las cuatro restantes la flanquean. Dado la inclinación de la plancha tobácea, si se vertiera algún líquido en el extremo oriental (A), el fluido discurriría hasta el extremo occidental(B).



Esquema de las distintas construcciones presentes en la localidad. Al E, un pequeño muro se adosa a una gran piedra. Al N, un muro semicircular parece continuarse a través de un "cardón" (*Euphorbia canariensis*). Al S, hay dos muros de difícil interpretación.

En el recuadro superior, alzado del conjunto A-B.



UNA INTRODUCCIÓN A LOS CONJUNTOS BORROSOS Y SU APLICACIÓN EN ARQUEOLOGÍA

MARCOS M. RODRÍGUEZ PESTANA

Universidad de La Laguna

Introduciremos las nociones básicas en que se basa la teoría de los borrosos prestando especial hincapié en las ideas que sugieren fructíferas aplicaciones de la teoría en el campo de la arqueología.

INTRODUCCIÓN

En este trabajo presentaremos una introducción a la teoría de los conjuntos borrosos, centrando nuestros objetivos en aclarar -en parte al menos- las enormes potencialidades que presenta un estudio matemático en el que los conjuntos y sus relaciones no están definidos con claridad y biunívocamente con conceptos de verdad o mentira, de cierto o falso.

Ni que decir tiene que, desgraciadamente, en arqueología -y a todos los niveles de investigación- nos encontramos frecuentemente con objetos y situaciones que no presentan contornos bien definidos, que «parece más probable que sea esto que aquello» pero que no permiten un estudio con certeza absoluta. Hacia problemas de este estilo encamina sus pasos la teoría de conjuntos borrosos.

No pretendemos realizar un estudio matemático riguroso y exhaustivo, pero sí queremos presentar los pilares sobre los que se asienta esta teoría, que pueden ayudar a aclarar sus potencialidades de uso, al mismo tiempo que evitarán un uso inapropiado que sería muy perjudicial y apartaría cualquier beneficio que se quisiera obtener de ella.

Desde que en 1965, L. A. Zadeh introdujo los subconjuntos borrosos (Fuzzy Sets) se ha producido tal cantidad de trabajos que actualmente se publica, en promedio, un artículo a día en el que se utilizan los conceptos básicos de dicha teoría.

Las aplicaciones de los borrosos aún no han dado lugar a una disciplina propiamente matemática como, por ejemplo, la pintura renacentista dio lugar a la geometría proyectiva; se trata de un conjunto muy amplio de trabajos, repartidos en muchas

revistas y pocos libros, dirigidos a la elaboración de algo así como una lógica de la evaluación para la matematización de procesos involucrando clases mal definidas de objetos; de una lógica de los conceptos vagos, imprecisos.

Cabe pensar que, con el estudio de los subconjuntos borrosos, se intente dar un paso en el estudio de la vaguedad, análogo al que se dio con la aparición de la teoría de la probabilidad, para la modelización matemática de situaciones estadísticas en las cuales la indeterminación se presentaba menos en el conjunto de resultados como tal, que en la evaluación numérica del grado de verosimilitud de uno particular antes de la realización de las experiencias. La teoría de los "fuzzy sets" está presentando una valiosa ayuda al iniciar la escritura matemática de complicadas situaciones relacionales entre objetos vagos o de agrupación vaga y facilitando, a la vez, un álgebra entre tales relaciones.

LA LÓGICA MULTIVALENTE

Alfredo Deaño, en su libro "Introducción a la lógica formal" en el que describe la lógica llamada "clásica" como Apofántica (por dejar fuera enunciados de los que no quepa preguntar si son verdaderos o falsos), Bivalente (sólo admite para los enunciados los dos valores de verdad, verdadero o falso), Asertórica (al excluir la existencia de modalidades de la verdad) y Extensorial (por operar sólo en términos de la verdad global de sus expresiones). Esta es la lógica clásica que arranca de Boole y de Peirce y que llega a la gran sistematización de Whitehead y Russel.

Si aceptamos proposiciones con un tercer valor lógico de verdad que puede interpretarse como la "posibilidad" y lo representamos por $1/2$, deberemos añadir a los anteriores principios los relativos al $1/2$, lo que puede hacerse de varias maneras, de las que, en opinión de Lukasiewicz la siguiente es la que "menos se aparta" de la lógica bivalente:

1) Principios de identidad:

$$(0 = \frac{1}{2}) = (\frac{1}{2} = 0) = (1 = \frac{1}{2}) = (\frac{1}{2} = 1) = \frac{1}{2}$$

$$(\frac{1}{2} = \frac{1}{2}) = 1$$

2) Principios de implicación:

$$(0 \Rightarrow \frac{1}{2}) = (\frac{1}{2} \Rightarrow 1) = (\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2}) = 1$$

$$(\frac{1}{2} \Rightarrow 0) = (1 \Rightarrow \frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$$

Si representamos el valor lógico de una proposición p por la función v a valores en $\{0, \frac{1}{2}, 1\}$, entonces las tablas de valores pueden resumirse por las fórmulas

$$v(\neg p) = 1 - v(p), \quad v(p \vee q) = \max\{v(p), v(q)\},$$

$$v(p \wedge q) = \min\{v(p), v(q)\},$$

y este cálculo proposicional ternario se conoce como Lukasiewicz-Kleene.

El tomar los valores 0, 1/2, 1 es irrelevante; lo único que tiene importancia es el hecho de que \max y \min son operaciones con números reales entre 0 y 1 que verifiquen la propiedad $\min\{x, \max\{y, z\}\} = \max\{\min\{x, y\}, \min\{x, z\}\}$.

a). Tendremos sistemas de lógicas multivalentes cada vez que consideremos valoraciones $v: P \rightarrow [0, 1]$, de manera que $v(p) \in [0, 1]$ refleje el “grado de verdad” de la proposición p ; b). La lógica será finitamente multivalente si $v(P)$ es finito (como sucede en los casos trivalentes) o será infinitamente multivalente si $v(P)$ es infinito; c). En cualquier caso, si las valoraciones las consideramos ligadas a los conectivos lógicos mediante las fórmulas de Lukasiewicz-Kleene, hablaremos de una lógica multivalente L indicándose con un subíndice si es finita o infinitamente multivalente; d). En cuanto a la interpretación de los valores de verdad diferentes del 0 (“verdad”) y del 1 (“falso”), está claro que depende de la interpretación que quiera dársele a la desviación lógica elegida; así en un cálculo tetravalente las proposiciones podrían ser, además de verdaderas y falsas, “más bien verdaderas que falsas”, y “más bien falsas que verdaderas”, lo que nos lleva a admitir un quinto valor, “indeterminado”.

Si J es un subconjunto simétrico de $[0, 1]$, el cálculo proposicional multivalente L correspondiente difiere del cálculo proposicional binario únicamente (en cuanto a las propiedades reticulares) en la no-validez universal de los principios del tercero excluido y de no-contradicción.

LA TEORÍA DE ZADEH DE LOS CONJUNTOS BORROSOS

Sea X un conjunto, universo del discurso por cuanto vamos a limitarnos a considerar propiedades que sean o no, o en un grado, verificadas por sus elementos; es decir, propiedades que las verifique X con carácter multivalente. Sea A el conjunto de tales proposiciones y consideremos las proposiciones $p_x = “x \text{ verifica } p”$ con x elemento de X . Sea J un subconjunto de $[0, 1]$ en el que es posible definir multivaloraciones de Lukasiewicz, y designemos al conjunto de estas últimas por $\{v\}$.

Con cada $p \in A$ y cada v , podemos considerar al número $v(p) \in J$, y con ello la función $\varphi_p^v: X \rightarrow J$, definida por $\varphi_p^v(x) = v(p_x)$. Está claro que φ_p^v depende de v ; para cada valoración multivalente v , se obtiene una φ_p^v diferente para la misma propiedad p . En la forma que hemos comentado, φ_p^v determina una clasificación de X a la que se denomina “subconjunto borroso” de X .

Siendo v L-valoraciones, es

$$\begin{aligned}
 v(p_x \vee q_x) &= \max\{v(p_x), v(q_x)\} = \\
 &= \max\{\varphi_p^v(x), \varphi_q^v(x)\}, v(p_x \wedge q_x) = \\
 &= \min\{v(p_x), v(q_x)\} = \min\{\varphi_p^v(x), \varphi_q^v(x)\}, v(\neg p_x) = \\
 &= 1 - v(p_x)
 \end{aligned}$$

Para conservar las correspondencias clásicas dentro de una "teoría de subconjuntos borrosos" tomamos:

$$\begin{aligned}
 (\varphi_p^v \cup \varphi_q^v)(x) &= \max\{\varphi_p^v(x), \varphi_q^v(x)\}, \\
 (\varphi_p^v \cup \varphi_q^v)(x) &= \min\{\varphi_p^v(x), \varphi_q^v(x)\}, \\
 \overline{\varphi_p^v}(x) &= 1 - \varphi_p^v(x),
 \end{aligned}$$

para cada $x \in X$

No habrán sólo subconjuntos borrosos relativos a la multivaloración v , sino que cada multivaluación dará lugar a una colección de ellos; lo que no excluye posibles coincidencias. En cierto modo cada aplicación $\varphi: X \rightarrow J$ define un subconjunto borroso de X , lo que llevó a Zadeh a introducir los subconjuntos borrosos de X como "los \underline{A} definidos como las aplicaciones $\varphi \underline{A}: X \rightarrow J$ ", de manera que $\varphi \underline{A}$ debe ser entendida como una función característica generalizada y definiéndose las operaciones básicas:

-Igualdad $\underline{A} = \underline{B}$, por $\varphi_{\underline{A}}(x) = \varphi_{\underline{B}}(x)$,

-Reunión $\underline{A} \cup \underline{B}$, por $\varphi_{\underline{A} \cup \underline{B}}(x) = \max\{\varphi_{\underline{A}}(x), \varphi_{\underline{B}}(x)\}$,

-Intersección $\underline{A} \cap \underline{B}$, por $\varphi_{\underline{A} \cap \underline{B}}(x) = \min\{\varphi_{\underline{A}}(x), \varphi_{\underline{B}}(x)\}$,

-Complementario $\overline{\underline{A}}$, por $\varphi_{\overline{\underline{A}}}(x) = 1 - \varphi_{\underline{A}}(x)$,

para cada $x \in A$.

El conjunto de todos los subconjuntos borrosos correspondientes a J se escribe $P_J(X)$, cuyos elementos se pueden identificar con las funciones de J^X (conjunto de las funciones $X \rightarrow J$).

Th. de Zadeh: Sea J un subconjunto de $[0,1]$ tal que $\{0, 1\} \subset J$ y que si $x \in J$, también $1 - x \in J$. En $P_J(X) = J^X$ se considera la relación binaria

“ $A \subset B$ si $A(x) \leq B(x)$, para todo $x \in X$ ”, siendo \leq el orden (total) usual de la recta real. Es:

1) \subset un orden parcial, no total, con máximo la función X definida por $X(x) = 1$, para todo $x \in X$ y mínimo la función \emptyset definida por $\emptyset(x) = 0$;

2) Respecto de tal orden, en $P_J(X)$ las operaciones

$$(A \cup B)(x) = \max \{A(x), B(x)\}$$

y

$$(A \cap B)(x) = \min \{A(x), B(x)\}$$

son asociaitivas y dan el supremo y el ínfimo respectivamente, del par $\{A, B\}$;

3) La operación monaria $\bar{A}(x) = 1 - A(x)$, verifica $\bar{\bar{A}} = A$ y las leyes de Morgan $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$, $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$, así como $\overline{\emptyset} = X$;

4) Cualesquiera que sean A, B, C de $P_J(X)$, se verifican las leyes distributivas

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C),$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C);$$

5) Sucece que $A \cap \bar{A} \neq \emptyset$ y $A \cup \bar{A} \neq X$, excepto si $J = \{0, 1\}$;

6) El conjunto $\{0, 1\}^X$ es una subálgebra de Boole de $P_J(X)$.

El teorema puede enunciarse más brevemente:

“La estructura $(P_J(X), \subset, \emptyset, X; \cup, \cap, -)$ es un álgebra de De Morgan que es álgebra de Boole si $J = \{0, 1\}$ ”. Un álgebra de De Morgan es un retículo distributivo provisto de una negación, llamada por abuso de lenguaje “complemento”, que verifica las leyes de idempotencia y de De Morgan. Un álgebra de Boole es un álgebra de De Morgan en la que el complemento lo es de verdad, es decir, cumple $A \cup \bar{A} = X$ y $A \cap \bar{A} = \emptyset$.

$P(X)$ y $P_{\{0,1\}}(X)$ son álgebras de Boole que pueden confundirse; es decir, desde el punto de vista matemático, que entre ellas existe un isomorfismo de álgebras de Boole, o aplicación biyectiva que conserva las tres operaciones básicas de reunión, intersección y complementario.

Se puede considerar $P_J(X)$ como una extensión funcional de $P(X)$. Así, todas las definiciones, teoremas, etc., para borrosos valen también para nítidos. Realmente Zadeh introdujo los subconjuntos borrosos en el caso $P(X)$, en que

$$J = [0, 1], P_{\{0,1\}}(X) \subset P_J(X) \subset P(X).$$

Cuando X es finito, sea $X = \{x_1, \dots, x_n\}$, se llama PESO o POTENCIA de un subconjunto borroso A al número real $A(x_1) + A(x_2) + \dots + A(x_n)$, concepto que en este caso finito generaliza el de número de elementos o cardinalidad de los conjuntos nítidos.

En cuanto al significado de la relación de pertenencia, la teoría de Zadeh surge precisamente de romper la dicotomía “ \in , \notin ” que, en términos de función característica, es (para un subconjunto nítido A de X) $\varphi_A(x) = 1$, si $x \in A$ y $\varphi_A(x) = 0$, si $x \notin A$. Por ello, y en principio, la relación de pertenencia viene dada (para un subconjunto borroso A de X) por un valor $A(x) = \alpha$, con $0 \leq \alpha \leq 1$, por lo que podría escribirse $x \in_A \alpha$ y leerse « x pertenece al nivel α a A », de manera que \in y \notin serían los casos extremos respectivos \in_0 y \in_1 .

Dados $x \in X$ y $A \in P_J(X)$ tal que $A(x) \neq 0$, cabe considerar aquellos difusos $B_x^\lambda \subset A$ tales que $\lambda = B_x^\lambda(x) \neq 0$ para que x pertenezca en algún grado $\lambda > 0$ a B_x^λ , y que si $z \neq x$ sea $B_x^\lambda(z) = 0$, para que ningún otro elemento de X sea de B_x^λ . Se trata de borrosos que sólo tienen valor no nulo en x : bastará que sea $\lambda = B_x^\lambda(x) \leq A(x)$, para que $B_x^\lambda \subset A$. El mayor de estos borrosos es aquel para el que $B_x^\lambda(x) = A(x)$ y se le llama el singletón-borroso de x respecto A , escribiéndose $A|x$ para indicarlo. Así pues, $A|x$ es la función definida por $A|x(x) = A(x)$ y $A|x(z) = 0$ si $x \neq z$.

Cualquiera que sea el subconjunto borroso $A \in P_J(X)$ es $A = \bigcup_{x \in X} A|x$; es decir, A es la reunión (borrosa) de sus singletones borrosos. Cuando X es finito, lleva a escribir los subconjuntos borrosos A de X en la forma $A = a_1|x_1 + a_2|x_2 + \dots + a_n|x_n$, con el cambio de notación $A|x_i$ por $a_i|x_i$, siendo $a_i = A(x_i)$ y de \cup por $+$.

El teorema llamado por Zadeh «teorema de resolución» liga, dentro de la propia teoría de Zadeh, los subconjuntos borrosos con los diseños clasificatorios: dado un borroso A sea, para cada $\lambda \in J$, el subconjunto nítido de X definido por

$$\begin{aligned} A_\lambda &= \{x \in X; B_x^\lambda \subset A\} = \\ &= \{x \in X; \lambda \leq A(x)\} = \\ &= \{x \in X; A(x) \in J \cap [\lambda, 1]\}; \end{aligned}$$

como $A_0 = X$ se excluye el caso $\lambda = 0$ y se supone usualmente que $\lambda \in J_0 = J - \{0\}$, con lo que $A(x) \in J_0 \cap [\lambda, 1]$, y se tiene $A_\lambda = A^{-1}(J_0 \cap [\lambda, 1])$. Obsérvese que si $\lambda' \leq \lambda''$, entonces $[\lambda'', 1] \subset [\lambda', 1]$ y por tanto $A_{\lambda''} \subset A_\lambda$. De los conjuntos nítidos A_λ -llamados “niveles de nitidez” del borroso A - se deduce el teorema de resolución.

Si se indica por $\underline{\underline{\lambda}}$ al subconjunto borroso "constante" definido por $\underline{\underline{\lambda}}(x) = \lambda$, para todo $x \in X$, se verifica, dado $A \in P_J(x)$:

$$\begin{aligned} A(x) &= \sup\{\lambda; \lambda \leq A(x)\} = \sup\{\min\{\lambda, 1\}; \lambda \leq A(x)\} = \\ &= \sup\{\min\{\lambda, A_\lambda(x)\}; \lambda \in J\} = \sup\left\{\left(\underline{\underline{\lambda}} \cap A_\lambda\right)(x); \lambda \in J\right\} = \\ &= \left(\bigcup_{\lambda \in J} (\underline{\underline{\lambda}} \cap A_\lambda)\right)(x), \end{aligned}$$

que no depende de x , por lo que $A = \bigcup_{\lambda \in J} [\underline{\underline{\lambda}} \cap A_\lambda]$, y como para $\lambda = \underline{\underline{0}}$ es $\underline{\underline{0}} \cap X = \emptyset$ queda $A = \bigcup_{\lambda \in J_0} [\underline{\underline{\lambda}} \cap A_\lambda]$. Esta expresión constituye el llamado teorema o identidad de resolución y expresa el conjunto borroso A como reunión "borrosa" de intersecciones "borrosas" de los niveles de nitidez con las constantes.

Teorema: Si $A, B \in P_J(X)$, entonces: 1) $A = B$ si y sólo si es $A_\lambda = B_\lambda$ para cada $\lambda \in J_0$; 2) $(A \cap B)_\lambda = A_\lambda \cap B_\lambda$; 3) $(A \cup B)_\lambda = A_\lambda \cup B_\lambda$; 4) $(\overline{A})_\lambda = \overline{A_{1-\lambda}} = A^{-1}(1 - \lambda)$.

Aparece claramente la necesidad de una "lógica continua" como base para la formulación matemática que pueda llevar hacia unos modelos teóricos que permitan estudios científicos que involucren conceptos que, como "pequeño", están bien anclados en el lenguaje ordinario, pero que la lógica ordinaria no permite aprehender con la necesaria "manejabilidad". La diferenciación de niveles de una propiedad que puede alcanzarse mediante el lenguaje, es poco fina para el análisis científico. En cambio siempre es posible el camino inverso; así, por ejemplo, si una propiedad consigue describirse de manera satisfactoria por medio de un subconjunto borroso, siempre cabe limitarse a distinciones que permitan emplear el lenguaje y adoptar, pongamos por caso, dos niveles $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ de manera que si $x \in X$ es tal que $A(x) < \varepsilon_1$ digamos que x no cumple A (realmente, que no pertenece a A al nivel ε_1), si es $\varepsilon_1 \leq A(x) \leq \varepsilon_2$ digamos que es dudoso que cumpla A y si es $\varepsilon_2 \leq A(x)$ digamos que x cumple A , simplificando el problema al nivel de una lógica trivalente de Lukasiewicz-Kleene.

EL PROBLEMA "BORROSO" - CONCEPTO QUE REPRESENTA

No ha de extrañar que interesantes aplicaciones de los conjuntos borrosos hayan tenido lugar en el tratamiento matemático de procesos de decisión que comporten datos incompletos o inciertos, es decir, en los que se tengan que tomar decisiones en un ambiente de incertidumbre y sin la posibilidad de efectuar un estudio estadístico (por la imposibilidad de efectuar muestras, por la rapidez con que se ha de tomar la decisión, o por lo que sea). En principio la gran utilidad de la teoría de Zadeh aparece

en aplicaciones a los casos en que hay que estudiar un "concepto inexacto", que se predica de objetos x tales que permiten un control del concepto a través de un número finito de propiedades del tipo " x verifica ..."; que se evalúan, numéricamente o no, por medio de ciertas funciones de relación con el objeto x , que luego permiten resumir en un número del intervalo $[0,1]$ el grado en que cada objeto x verifica todo el "concepto inexacto" en cuestión. Por consiguiente es un problema teórico importante, y en gran medida no resuelto, el qué es y cómo se hace para escribir y nombrar un subconjunto borroso.

En principio hay que renunciar a la idea de que un concepto ambiguo se representa "perfectamente" por un subconjunto borroso, al igual que se está acostumbrado a pensar que los conjuntos clásicos (o nítidos) representan conceptos como "los números primos". Únicamente tendremos representaciones dependientes de ciertas propiedades evaluables y resumibles en un número real. Con todo podemos hacer la hipótesis de que las propiedades que quieren predicarse de los objetos están ligadas por la estructura reticular de álgebra de De Morgan puesto que, cuando menos, hay que renunciar (respecto del caso booleano) al tercero excluido y, si mantenemos la ley de involución para la negación ($\neg\neg p = p$), también al principio de no-contradicción.

Sea X un conjunto y A un álgebra de De Morgan (de proposiciones sobre X) de manera que exista un morfismo inyectivo $\varphi: A \rightarrow P(X)$, por el que cada $p \in A$ tenga un borroso correspondiente $\varphi(p) \in P$, de manera que

$$\varphi(p \vee q) = \varphi(p) \cup \varphi(q),$$

$$\varphi(p \wedge q) = \varphi(p) \cap \varphi(q),$$

$$\varphi(\neg p) = 1 - \varphi(p).$$

Como consecuencia de ser sumergible en $P(X)$, el álgebra de De Morgan A queda dotada de una familia $\{x\}$ de multivaluaciones de Lukasiewicz. El número de ellas que son realmente diferentes depende, no sólo del número de elementos de X , sino también de la "forma" de los borrosos que estén en la imagen de A . De alguna manera los borrosos P, Q, \dots hacen de funciones de abstracción, sobre X , de las propiedades designadas por los elementos de A .

Cada vez que tengamos un álgebra de De Morgan dotada de una familia de multivaloraciones de Lukasiewicz, el álgebra cociente obtenida al identificar los elementos con igual "tabla de verdad", puede considerarse como una subálgebra de De Morgan de subconjuntos borrosos.

LAS RELACIONES BORROSAS

Los "predicados n-arios" sobre un conjunto determinado X determinan subconjuntos borrosos del producto cartesiano $X \times \dots \times X$; es decir, funciones

$R(x_1, \dots, x_n) \in [0, 1]$, con $(x_1, \dots, x_n) \in X \times \dots \times X$. Según esto, po-

dríamos definir una relación borrosa entre los conjuntos X e Y como representando un predicado 1-ario sobre el conjunto $X \times Y$, es decir, como una aplicación $R: X \times Y \rightarrow [0, 1]$. Con esta definición, una relación binaria borrosa sobre un conjunto X finito con elementos x_1, \dots, x_n , es decir una función $R: X \times X \rightarrow [0, 1]$ vendría caracterizada por los valores $r_{ij} = R(x_i, x_j) \in [0, 1]$ de R sobre los pares (x_i, x_j) , $1 \leq i, j \leq n$. Cabe pues imaginar una relación binaria, bien como una "matriz" $[R]$ representando los valores de la función R , bien como un grafo valorado (X, R) en el que los vértices son los puntos de X y los arcos tienen valores que "representan" la dureza del vínculo entre ellos.

Hay dos posibilidades para definir el producto cartesiano:

$$A \otimes_1 B(x, y) = A(x) \wedge B(y) = \min\{A(x), B(y)\},$$

$$\text{siendo } A: X \rightarrow [0, 1], B: Y \rightarrow [0, 1].$$

Como en $[0, 1]$ siempre es menor el producto que el mínimo de dos números $(A \otimes_2 B)_\lambda \subset (A \otimes_1 B)_\lambda$, siendo ambos de $\mathbb{P}(X \times Y)$, con lo que la relación entre los correspondientes niveles de nitidez es $(A \otimes_2 B)_\lambda \subset (A \otimes_1 B)_\lambda$. Además, dados $A \in \mathbb{P}(X)$ y $B \in \mathbb{P}(Y)$, es $(A \otimes_1 B)_\lambda = A_\lambda \times B_\lambda$.

Definición. Dados n universos de discurso x_1, \dots, x_n y n subconjuntos borrosos $A^1 \in \mathbb{P}(X_1), \dots, A^n \in \mathbb{P}(X_n)$, llamaremos producto cartesiano de los A^1, \dots, A^n , al conjunto borroso $A^1 \otimes \dots \otimes A^n \in \mathbb{P}(X_1 \times \dots \times X_n)$ definido por $(A^1 \otimes \dots \otimes A^n)(x_1, \dots, x_n) = \min\{A^1(x_1), \dots, A^n(x_n)\}$.

Definición. Dados dos subconjuntos borrosos $A \in \mathbb{P}(X), B \in \mathbb{P}(Y)$, llamaremos relaciones (binarias) borrosas entre A y B , a los borrosos $R \in \mathbb{P}(X \times Y)$ tales que $R \subset A \otimes B$. Cuando $A = B$ diremos que R es una relación (binaria) borrosa en A .

Teorema. R es una relación binaria borrosa entre A y B , si y sólo si para cada $\lambda \in [0, 1]$ es R_λ una relación binaria nítida entre A_λ y B_λ .

Dados dos conjuntos nítidos X e Y y una relación borrosa R entre ambos, si consideramos los subconjuntos borrosos $d(R): X \rightarrow [0, 1], r(R): Y \rightarrow [0, 1]$ definidos, respectivamente, por

$$d(R)(x) = \sup\{R(x, y); y \in Y\},$$

$$r(R)(y) = \sup\{R(x, y); x \in X\}$$

se tiene que:

-- $R(x, y) \leq d(R)(x)$, para todo $x \in X$,

-- $R(x, y) \leq r(R)(y)$, para todo $y \in Y$,

por lo cual es $R(x, y) \leq d(R)(x) \wedge r(R)(y)$, para todo $(x, y) \in X \times Y$; por tanto, $R \subset d(R) \otimes r(R)$. Se dice que $d(R)$ es el dominio de R y que $r(R)$ es su recorrido.

Se representa el cuantificador "existe algún" como $\bigvee_{x \in X}$; así, por ejemplo, sería

$$r(R) = \left\{ y \in Y; \bigvee_{x \in X} R(x, y) \right\}.$$

Diremos que una relación borrosa R es reflexiva respecto de un subconjunto borroso A (que puede ser el mismo respecto del que R sea una relación) cuando para todo $x \in X$ sea $R(x, x) = A(x)$.

Proposición. Sea $R \subset A \otimes A$. R es A -reflexiva si y sólo si todos sus niveles de nitidez R_λ son relaciones binarias reflexivas en A_λ , para todo $\lambda \in [0, 1]$.

De una relación borrosa R diremos simplemente que es reflexiva cuando sea X -reflexiva; es decir, cuando $R(x, x) = 1$, para todo $x \in X$. También se dice que es 1-reflexiva.

Dícese que una relación borrosa R es simétrica si para todo par $(x, y) \in X \times Y$ es $R(x, y) = R(y, x)$. Obsérvese que si R fuese nítida ello significaría " $(x, y) \in R \Leftrightarrow (y, x) \in R$ ", por lo que esta definición también comprende a la clásica.

Una relación borrosa se dice que es antisimétrica cuando " $R(x, y) > 0, R(y, x) > 0$ implican conjuntamente que sea $x = y$ ".

Definición. Dadas dos relaciones borrosas $R \in P(X \times Y)$, $Q \in P(X \times Y)$, se llama composición máx-mín de ambas y se escribe $R \cdot Q$ a la relación borrosa entre X, Z dada por $R \cdot Q(x, z) = \bigvee_{y \in Y} [R(x, y) \wedge Q(y, z)]$ para cada par $(x, z) \in X \times Z$.

Definición. Dada una relación de $R \in P(X \times X)$, diremos que A es transitiva si verifica $R \cdot R \subset R$.

Una relación transitiva y, a la vez, reflexiva es idempotente respecto de la composición.

Proposición. Una relación borrosa R en X es transitiva si y sólo si sus niveles de nitidez R_λ , $\lambda \in [0, 1]$, son relaciones clásicas transitivas.

Las relaciones $R \in P(X \times X)$ que son reflexivas y simétricas se llaman semejanzas o proximidades y las que son reflexivas y transitivas se llaman pre-órdenes. Los pre-órdenes simétricos o semejanzas transitivas se llaman similitudes o equivalencias borrosas. Los pre-órdenes antisimétricos se llaman órdenes borrosos.

$[R \cdot Q] = [R] \diamond [Q]$ donde, por ejemplo, si las matrices son 3×3 y la tercera fila de $R(0' 9 - 1 - 0)$ y la primera columna de $Q(0' 1 - 1 - 0' 3)$, el elemento $(3,1)$ del producto es:

$$(0' 9 \wedge 0' 1) \vee (1 \wedge 1) \vee (0 \wedge 0' 3) = 0' 1 \vee 1 \vee 0 = 1.$$

PRE-ÓRDENES BORROSOS: EQUIVALENTES Y ÓRDENES

Si R es un preorden borroso en X , todos sus niveles de nitidez R_λ ($\lambda \in (0, 1]$) son pre-órdenes clásicos, nítidos, en X , al conservarse las propiedades reflexiva y simétrica. Entonces se dispone, en X y para cada λ , de las equivalencias nítidas E_λ dadas por $(x, y) \in E_\lambda \Leftrightarrow (x, y) \in R_\lambda \text{ y } (y, x) \in R_\lambda$, que determinan los conjuntos cocientes $\pi_\lambda = X / E_\lambda$ o particiones de nivel λ . Si indicamos por $[x]_\lambda$, $[y]_\lambda$, ... a los elementos de π_λ (clases de equivalencia módulo E_λ), se tiene el orden parcial nítido: “[x] λ \leq_λ [y] λ $\Leftrightarrow (x, y) \in R_\lambda”$, entre tales clases.

Por consiguiente, todo pre-orden borroso R determina una colección $\{\pi_\lambda ; \lambda \in (0, 1]\}$ de particiones, cada una de las cuales está internamente ordenada por \leq_λ . Tales particiones, a su vez, están ordenadas entre ellas; en efecto $\lambda' \leq \lambda$ implica $R_{\lambda'} \supset R_\lambda$, por lo cual también es $E_{\lambda'} \supset E_\lambda$, lo que significa que $[x]_{\lambda'} \subset [x]_\lambda$; o sea, que la partición $\pi_{\lambda'}$ tiene más elementos por clase que la π_λ (“es menos fina”). Así, cuando λ aumenta desde cerca de 0 hacia 1, las π_λ varían de menos a más finas.

Dada una sucesión finita y decreciente de pre-órdenes nítidos en X es posible definir un pre-orden borroso. Basta para ello asignar a cada pre-orden un nivel de nitidez diferente (y el menor, no nulo) y aplicar la identidad de resolución.

Si $R \in P(X \times X)$ es una equivalencia o similitud borrosa (con transitividad máx-mín), entonces todos sus niveles de nitidez R_λ son relaciones de equivalencia nítidas en X que determinan ($R_\lambda = E_\lambda$ al ser simétricas) particiones π_λ que son más finas cuanto más grande es el valor de λ . En este caso, todos los órdenes \leq_λ son la identidad (el desorden total), ya que si $[x]_\lambda \leq_\lambda [y]_\lambda$, es que $(x, y) \in R_\lambda$ y por la simetría es también $(y, x) \in R_\lambda$, por lo que $[y]_\lambda \leq_\lambda [x]_\lambda$; así $[x]_\lambda = [y]_\lambda$; y las únicas clases comparables son cada una consigo misma. Carece por tanto de interés la consideración de los órdenes entre los elementos de las particiones y lo único significativo es el árbol jerárquico de particiones por niveles, que se llama cociente borroso de X módulo R .

Si R es una equivalencia borrosa en X , se llama *clase de similitud* de cada $x \in X$, al subconjunto borroso $R[x] \in P(X)$, definido por $R[x](y) = R(x, y)$, para

cada $y \in X$. Cuando X es finito con n elementos, es $R[i](j) = R(i, j)$, $i = 1, 2, \dots, n$, por lo que las clases de similitud se obtienen a partir de las filas de la matriz $[R]$: $R[i] = r_{i1}|1 + r_{i2}|2 + \dots + r_{in}|n$. Cuando R es una relación nítida, para cada x es $R[x]$ un subconjunto ordinario de X ; se trata desde luego de la clase de equivalencia de x tal como la conocemos en la teoría ordinaria de conjuntos. En el caso borroso y en principio no hay motivo para que haya menos "clases" que elementos tiene X .

Se llama grado maximal de un borroso $A \in P(X)$, al número real $h(A) = \sup\{A(x) \in [0, 1]; x \in X\}$, llamándose normales a los que $h(A) = 1$, lo que significa si X es finito que existe algún x para el que $A(x) = 1$. Si X es infinito, por ejemplo R , entonces A puede tener la recta $y = 1$ como asíntota y no alcanzarse el grado maximal $h(A) = 1$.

Cualquiera que sea la relación borrosa $R \in P(X \times X)$, si $d(R)$ es su dominio y $r(R)$ su recorrido, se tiene:

$$h(d(R)) = \bigvee_{x \in X} d(R)(x) = \bigvee_{x \in X} \bigvee_{y \in Y} R(x, y) = \bigvee_{y \in Y} r(R)(y) = h(r(R)),$$

valor común coincidente con el grado maximal de R . Las equivalencias borrosas coinciden con los órdenes jerárquicos subindicados, que se identifican con la familia de los abiertos, ordenados por inclusión, de la topología de un conveniente espacio ultramétrico.

Un orden borroso es una relación borrosa $R \in P(X \times X)$ que verifica las propiedades 1-reflexiva, transitiva y antisimétrica. Además, por todas las propiedades enunciadas respecto de los niveles de nitidez, si R es un orden borroso, todos los niveles de nitidez R_λ , $\lambda \in (0, 1]$ son órdenes nítidos en X . Al igual que para las equivalencias, y como consecuencia de ser preórdenes, también es cierto que dada una familia R_λ de órdenes clásicos en X , con $\lambda \in (0, 1]$ y de manera que $R_1 \neq 0$ sea el menor, si es $[\lambda' \leq \lambda'' \Rightarrow R_{\lambda'} \supset R_{\lambda''}]$ para cada par λ', λ'' , entonces la relación borrosa $R = \bigcup_{\lambda \in (0, 1]} \lambda \cap R_\lambda$ es un orden borroso para X .

Cuando para cada $i \neq j$, uno de los dos r_{ij} o r_{ji} es, siempre, no nulo se dice que el orden borroso R es total.

Un grafo finito valorado, con n vértices, representará un orden borroso con tal de que: 1) en cada vértice haya un bucle; 2) entre cada par de elementos, bien no haya ninguna flecha, bien haya una sola; 3) para cada par de vértices x_i, x_j ($i < j$), el

$$\text{valor } v_{ij} \text{ de la flecha que los une verifica } v_{ij} = \bigvee_{\substack{k \neq i \\ k \neq j}} [v_{ik} \wedge v_{kj}]$$

EL PROBLEMA DE “EXTENDER” UNA FUNCIÓN A LOS SUBCONJUNTOS BORROSOS

Es de desear que la definición de extensión para borrosos conserve las propiedades básicas de la función “extensión” de la teoría clásica de conjuntos, por lo menos para el caso nítido. Estas propiedades son: $(f: X \rightarrow Y, \hat{f}: P(X) \rightarrow P(Y))$

- 1) $\hat{f}(A_1 \cup A_2) = \hat{f}(A_1) \cup \hat{f}(A_2)$; 2) $\hat{f}(A_1 \cap A_2) \subset \hat{f}(A_1) \cap \hat{f}(A_2)$ y
- 3) $\hat{f}(\bar{A}) \supset \bar{\hat{f}(A)}$.

Zadeh adoptó la siguiente definición que mantiene el mismo valor de pertenencia y que generaliza directamente el caso nítido; adoptó el que $\hat{f}(A|x_i) = A|f(x_i)$. De ahí la

Definición. Sean X, Y conjuntos nítidos no vacíos y una función (aplicación) entre ambos $f: X \rightarrow Y$. Llamaremos «extensión \hat{f} , de f a las partes borrosas de X » a la aplicación $\hat{f}: P(X) \rightarrow P(Y)$ definida para todo $A \in P(X)$, por

$$\hat{f}(A)(y) = \bigvee_{x \in f^{-1}(y)} A(x), \text{ para cada } y \in Y.$$

Si $A \in P(X)$, entonces $\hat{f}(A)(y) = 1$ si $f^{-1}(y) \cap A \neq \emptyset$, es decir si $y \in \hat{f}(A)$; y es $\hat{f}(A)(y) = 0$ si $f^{-1}(y) \cap A = \emptyset$, es decir si $y \notin \hat{f}(A)$; por consiguiente (el supremo de los $A(x)$ nunca será ahora diferente de cero o de uno), para cada $y \in Y$ es $\hat{f}(A)(y) = \hat{f}(A)(y)$, de donde $\hat{f}(A) = \hat{f}(A)$. La definición de Zadeh engloba, por tanto, a la clásica imagen de un conjunto por una función.

Con la extensión es posible trasladar a $P(X)$ toda operación $*$ definida en X . Veamos; si $*: X \times X \rightarrow X$ es una operación en X , cualquiera que sean $A, B \in P(X)$, y considerando el producto cartesiano borroso $A \otimes B: X \times X \rightarrow [0, 1]$, la extensión de $* a P(X \times X)$ lleva a

$$*(A \otimes B)(x) = \bigvee_{(y,z) \in x} (A \otimes B)(y, z) = \bigvee_{(y,z) \in f^{-1}(x)} [A(y) \wedge B(z)],$$

lo que tenemos un nuevo borroso $* A \otimes B: X \rightarrow [0, 1]$ que escribiremos $A * B$. Así $*$ es una operación entre los elementos de $P(X)$.

Análogamente a como hemos generalizado \hat{f} , cabe proceder con la “aplicación inversa” $f^{-1}: P(Y) \rightarrow P(X)$.

Definición. Sean S, Y conjuntos nítidos no vacíos y una aplicación $f: X \rightarrow Y$. Llamaremos “función inversa borrosa” de f , a la función $f^{-1}: P(Y) \rightarrow P(X)$, definida por $f^{-1}(B) = B \circ f$, para cada $B \in P(Y)$.

f^{-1} es un morfismo entre las álgebras de De Morgan $P(Y)$ y $P(X)$ que, además, cambia el álgebra de Boole $P(Y)$ en el álgebra de Boole $P(X)$.

Recordemos que, dado $A: X \rightarrow [0, 1]$, sus niveles de nitidez A_λ son los subconjuntos nítidos de X dados por $A^{-1}([\lambda, 1]) = \{x \in X; \lambda \leq A(x)\}$. Podríamos considerar, de la misma manera los niveles abiertos de nitidez $A^{-1}((\lambda, 1]) = A'_\lambda \subset A_\lambda$, con $0 \leq \lambda < 1$, de manera que si para algún $x' \in X$ es $\lambda = A(x')$, entonces la contención es estricta; o sea es $A'_\lambda \subset A_\lambda$ con $A'_\lambda \neq A_\lambda$. Ello no obsta para que el conjunto $\{A_\lambda; \lambda \in (0, 1]\}$ pueda coincidir con el $\{A'_\lambda; \lambda \in (0, 1]\}$, como es el caso en que, siendo $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ y todos los valores $A(x_i) = \alpha_i$ distintos, es $A'_0 = A_{\alpha_1}$, $A'_{\alpha_1} = A_{\alpha_2}$, $A'_{\alpha_2} = A_{\alpha_3}, \dots$, $A'_{\alpha_{n-1}} = A_{\alpha_n}$.

Lema 1. Si $f: X \rightarrow Y$ y si $A \in P(X)$, entonces para todo $\lambda \in [0, 1]$ se verifica: $\hat{f} \circ A^{-1}(\lambda) \subset \hat{f}(A)^{-1}(\lambda)$.

En particular, para cualquier subconjunto $H \subset [0, 1]$ es $f \circ A^{-1}(H) \subset f(H)^{-1}$, por lo que vale

Lema 2. 1) $\hat{f} \circ A^{-1}([\lambda, 1]) \subset \hat{f}(A)^{-1}([\lambda, 1])$, o sea $\hat{f}(A_\lambda) \subset (\hat{f}(A))_\lambda$.

2) $\hat{f} \circ A^{-1}((\lambda, 1]) \subset \hat{f}(A)^{-1}((\lambda, 1])$, o sea $\hat{f}(A'_\lambda) \subset (\hat{f}(A))_\lambda$.

Lema 3. Para todo $\lambda \in (\lambda, 1]$ es $\hat{f}(A)^{-1}((\lambda, 1]) \subset \hat{f} \circ A^{-1}((\lambda, 1])$, o sea $(\hat{f}(A))_\lambda \subset \hat{f}(A'_\lambda)$.

Teorema. Si $f: X \rightarrow Y$, para cada $A \in P(X)$ y cada $\lambda \in (0, 1]$, es $(\hat{f}(A))_\lambda = \hat{f}(A'_\lambda)$.

Modificando levemente la definición de los niveles de nitidez se consigue mantenerse dentro de la teoría de Zadeh. La consideración de los niveles abiertos de nitidez permite, análogamente, considerar un teorema de resolución y la equivalencia de definir los borrosos con él mismo; en efecto, a condición de trabajar con $[0, 1]$ es $A(x) = \sup\{\lambda \in [0, 1]; \lambda < A(x)\} = \sup\{\min\{\lambda, 1\}; \lambda < A(x)\} = \sup\{\min\{\lambda, A'_\lambda(x)\}; \lambda \in [0, 1]\} = \sup\{\left(\lambda \cap A'_\lambda\right)(x); \lambda \in [0, 1]\}$,

de donde $A = \bigcup_{\lambda \in [0,1]} \lambda \cap A'_\lambda$. En particular, como \hat{f} aplicada a los subconjuntos nítidos es la \hat{f} clásica, se tiene $\hat{f}(A) = \bigcup_{\lambda \in [0,1]} \lambda \cap \hat{f}(A'_\lambda)$.

Luego dada una familia como la A'_λ , $\lambda \in [0, 1]$, de conjuntos nítidos de X y una aplicación f , la fórmula anterior permite definir \hat{f} por medio de \hat{f} .

MODELADO DE SISTEMAS EN MEDIOAMBIENTES INCIERTOS

Muchos problemas que se encuentran en investigaciones científicas generan datos que incorporan una incertidumbre no estadística. En tales circunstancias una estructura axiomática borrosa para tratar con dichos problemas generalmente incrementa su tratabilidad matemática y su realismo físico. Discutiremos la aplicación de la *esperanza borrosa* a la investigación de sistemas dinámicos que están representados básicamente por ecuaciones diferenciales con coeficientes borrosos. Los principios generales pueden aplicarse a variedad de campos que versan sobre el problema de tomar decisiones en un medioambiente impreciso. Los conceptos que se introducen pueden ser muy útiles en análisis económico, urbano, social, biológico, y otros sistemas de orientación humana. En todas estas áreas hay procesos físicamente interesantes para los que la probabilidad media por unidad de tiempo no puede calcularse aún *a posteriori* sin gran cantidad de trabajo. Lo que se necesita en tales casos es un estimador de la media. Consideremos, por ejemplo, un sistema con un operador lineal L y siendo $\langle \lambda \rangle$ la media de algún parámetro λ . Entonces, aún si tenemos un estimador de la media, no es generalmente cierto que la solución i a una ecuación de la forma $Li + \langle \lambda \rangle i = 0$ es igual a $\langle i \rangle$, la solución $Li + \lambda i = 0$ promedio sobre la distribución de los λ .

Definición. Sea $\chi_A: \Omega \rightarrow [0, 1]$ y $\xi_T = \{x | \chi_A(x) \geq T\}$. La función χ_A se llama función *B-medible* si $\xi_T \in B$, $\forall T \in [0, 1]$.

Definición. Sea B una σ -álgebra de Borel (un campo boreliano) de subconjuntos de Ω . Una función de conjunto $\mu(\cdot)$ definida sobre B se llama una medida borrosa si cumple las siguientes propiedades:

1. $\mu(\emptyset) = 0$ (\emptyset es el conjunto vacío);
2. $\mu(\Omega) = 1$;
3. Si $\alpha, \beta \in B$ con $\alpha \subset \beta$, entonces $\mu(\alpha) \leq \mu(\beta)$;
4. Si $\{\alpha_j | 1 \leq j \leq \infty\}$ es una sucesión monótona, entonces:

$$\lim_{j \rightarrow \infty} [\mu(\alpha_j)] = \mu\left[\lim_{j \rightarrow \infty} (\alpha_j)\right].$$

Definición. Sea χ_A una función *B-medible* tal que $\chi_A \in [0, 1]$. El valor borroso esperado (FEV) de χ_A sobre un conjunto A , con respecto a la medida $\mu(\cdot)$, se define

como $\sup_{T \in [0,1]} \{ \min [T, \mu(\xi_T)] \}$, donde $\xi_T = \{x | \chi_A(x) \geq T\}$. Ahora, $\mu \{x | \chi_A(x) \geq T\} = f_A(T)$ es una función del umbral T . El cálculo de $\text{FEV}(\chi_A)$ consiste en encontrar la intersección de las curvas $T = f_A(T)$.

Definición. Un valor $T \in [0,1]$ es un valor subtípico de una función ξ si $T \leq \mu(\xi_T)$ (ξ_T representa a $\{x | \chi(x) \geq T\}$ y $\mu(\xi_T)$ representa a $\mu[\chi_A \geq T]$), supertípico si $T \geq \mu(\xi_T)$, y típico si $T = \mu(\xi_T)$. Nótese que un valor típico es a la vez subtípico y supertípico.

Teorema. Si un número T_1 es un valor subtípico de dos funciones, ξ y η , y si, para todo $T \geq T_1$, $\xi_T = \eta_T$, entonces $\text{FEV}(\xi) = \text{FEV}(\eta)$.

Teorema. Sea $\chi: \Omega \rightarrow [0,1]$ y $\xi_T = \{x | \chi(x) \leq T\} \in B$. Entonces $\sup_{T \in [0,1]} \{ \min [T, \mu(\xi_T)] \} = \inf_{T \in [0,1]} \{ \max [T, \mu(\xi_T)] \}$, donde μ es una medida borrosa.

Sea un conjunto finito de puntos de datos donde hay $(n+1)$ niveles distintos de compatibilidad, tales que $0 \leq \chi_1 < \chi_2 < \dots < \chi_{n+1} \leq 1$, que implica n niveles distintos de medida borrosa $\mu(\xi_T)$, excluidos 0 y 1, representados por $\{\mu_j(\xi_T)\}_{j=1}^n$.

Teorema. La media del conjunto de $2n+1$ números, representando $\{\chi_i\}_{i=1}^{n+1}$ y $\{\mu_j(\xi_T)\}_{j=1}^n$ como antes, donde $0 \leq \chi_1 < \chi_2 < \dots < \chi_{n+1} \leq 1$ para un n finito, ordenados en orden de magnitud (i.e., en orden de izquierda a derecha), es el FEV.

Un promedio es un valor típico que representa un conjunto de datos acumulados por un observador. Como tales valores típicos tienden a ubicarse centralmente dentro de un conjunto ordenado de datos, la media no es sino una medida de tendencia central. Además, es bien conocido que para grandes poblaciones la disminución muestral de las medias es aproximadamente una distribución gaussiana de la población, lo cual es un caso especial aproximado del teorema central del límite en la probabilidad clásica, un refinamiento de la desigualdad de Chebyshev (Sea ξ una variable aleatoria con

media μ y varianza finita $\sigma^2 \Rightarrow P[|\xi - \mu| \geq k \cdot \sigma] \leq \frac{1}{2k}$). Lógicamente, como el FEV es una forma de la tendencia central, el examen de los datos debe ser un punto crucial en la evaluación del FEV. El conjunto de datos no puede examinarse en un punto singular sino sobre el rango de t en el eje del tiempo. Debemos recordar que un estamento no determinístico se toma como un aserto sobre el conjunto de datos.

Argumentos filosóficos aparte, la solución obtenida aplicando estadísticos borrosos al problema anterior tiene dos principales ventajas:

1. En vez de construir una estructura de distribución desde los datos y entonces proceder a encontrar un valor medio o una solución a una ecuación diferencial estocástica, el observador tienen que usar la colección de datos como quedan e inferir desde ellos los resultados necesarios vía las técnicas de los estadísticos borrosos.

2. El proceso descrito no es sólo lógico sino muy fácil de aplicar, mientras que la aproximación estocástica es tediosa, si es posible, de resolver.

PATRÓN CLUSTERING

Se describe el problema clustering como el de encontrar agrupaciones naturales en un conjunto de datos, y tenemos que investigar medidas de similaridad entre muestras, tanto como la evaluación de una partición de un conjunto de muestras dentro de clusters. Es en esta partición en la que estamos interesados cuando discutimos el sujeto del clustering jerárquico.

Consideremos un espacio muestral de k muestras que queremos particionar en q clases. El primer estado es partir el conjunto de datos en k clusters, cada uno conteniendo exactamente una muestra. Entonces partimos el espacio muestral dentro de $k - 1, k - 2, \dots, j$ clusters donde, en el nivel j de la sucesión, tenemos $q = k - j + 1$. Así, el nivel uno corresponde a k clusters y el nivel k a uno. Dadas dos muestras \vec{x}_1 y \vec{x}_2 , en algún nivel estarán agrupadas juntas en el mismo cluster. Si la sucesión tiene la propiedad que cuando dos muestras están en el mismo cluster al nivel k permanecen juntas en los niveles superiores, entonces la sucesión se dice un clustering jerárquico. Ejemplos de clustering jerárquico tenemos en taxonomía biológica, donde los individuos se agrupan en especies, las especies en géneros, los géneros en familias y así sucesivamente.

Para cada clustering jerárquico hay un árbol correspondiente, llamado un dendrograma, que muestra cómo están agrupadas las muestras.

Los procedimientos de clustering jerárquico se dividen en dos clases distintas, aglomerativos y divisivos. Los procedimientos aglomerativos comienzan con q clusters singleton y forma la sucesión sumergiendo sucesivamente clusters. Los procedimientos divisivos comienzan con todas las muestras en un cluster y forman la sucesión por sucesivas particiones de los clusters. La computación necesaria para ir de un nivel a otro es usualmente más simple para los procedimientos aglomerativos. Cuando hay muchas muestras y se está interesado en sólo un pequeño número de clusters, esta computación tiene que repetirse muchas veces. En un nivel, la distancia entre los clusters más cercanos puede proveer el valor de disimilaridad para ese nivel. Debe notarse que no se ha dicho cómo medir la distancia entre dos clusters. Las medidas de distancia básicas incluyen:

$$d_{\min}(\rho_i, \rho_j) = \min_{\alpha \in \rho_i, \beta \in \rho_j} \|\alpha - \beta\|,$$

$$d_{\max}(\rho_i, \rho_j) = \max_{\alpha \in \rho_i, \beta \in \rho_j} \|\alpha - \beta\|,$$

$$d_{\text{avo}}(\rho_i, \rho_j) = \frac{1}{k_i k_j} \sum_{\alpha \in \rho_i} \sum_{\beta \in \rho_j} \|\alpha - \beta\|$$

$$d_{\text{mean}}(\rho_i, \rho_j) = \|M_i - M_j\|.$$

Si definimos la disimilaridad entre dos clusters por

$$\delta_{\min}(\rho_i, \rho_j) = \min_{\alpha \in \rho_i, \beta \in \rho_j} \delta(\alpha, \beta), \quad \delta_{\max}(\rho_i, \rho_j) = \max_{\alpha \in \rho_i, \beta \in \rho_j} \delta(\alpha, \beta),$$

entonces el procedimiento jerárquico clustering inducirá una función de distancia entre el conjunto dado de n muestras. Aún más, el rango de las distancias entre las muestras será invariante para una transformación monótona de los valores de disimilaridad.

La teoría entre grafos incluye la selección de una distancia umbral. Una vez se selecciona la distancia umbral d_0 , dos elementos están en el mismo cluster si la distancia entre ellos es menor que d_0 . Este procedimiento se puede generalizar fácilmente para aplicarlo a medidas de similaridad arbitrarias. Supongamos que escogemos un valor umbral d_0 , decimos que α es similar a β si

$$s(\alpha, \beta) > d_0: S_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } s(\alpha_i, \alpha_j) > d_0, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases} i, j = 1, \dots, n$$

Esta matriz define un grafo de similaridad en el que los nodos corresponden a puntos y un enlace une el nodo i y el j si y sólo si $S_{ij} = 1$.

Los procedimientos clustering por el algoritmo de linaje simple y por la versión modificada del algoritmo de linaje completo vienen descritos en términos de este grafo. Con el algoritmo de linaje simple, dos muestras α y β están en el mismo cluster si existe una cadena $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ tal que α es similar a α_1 , α_1 es similar a α_2 , y así para el resto de la cadena. Así este clustering corresponde a los componentes conectados del grafo de similaridad. Con el algoritmo de linaje completo, todas las muestras en un cluster dado deben ser similares unas a otras, y ninguna muestra puede estar en más de un cluster. Si renunciamos a este segundo requerimiento entonces este clustering corresponde a los subgrafos máximos completos del grafo de similaridad, los subgrafos "más grandes" con enlaces uniendo todos los pares de nodos. En general, los clusters del algoritmo de linaje completo se encontrarán entre los subgrafos máximos completos, pero no pueden determinarse sin conocer los valores de similaridad indeterminados.

Es claro que el algoritmo de vecino más cercano puede verse como un algoritmo para encontrar un árbol de extensión mínima. Inversamente, dado un árbol de extensión mínima, podemos encontrar los clustering producidos por el algoritmo del vecino más próximo. Eliminando el enlace más largo se produce el agrupamiento en dos clusters, eliminando el siguiente más largo se produce el agrupamiento en tres clusters, y así sucesivamente. Esto provoca una manera invertida de obtener un procedimiento jerárquico divisivo, y sugiere otras formas de dividir el grafo en subgrafos. Decimos

que un enlace es inconsistente si su longitud ξ es significativamente más grande que $\bar{\xi}$, la longitud media de todos los otros enlaces incidentes en sus vértices.

Para estimar subjetivamente la similitud entre pares de puntos de datos, adoptamos la convención de disponer los datos para la clasificación numérica en una matriz. Cada entero $[i:j]$ en tal matriz es la puntuación de la relación de proximidad entre los puntos datos i y j . Debe señalarse que los valores numéricos en la matriz de proximidad son en general sólo números descriptivos cuantitativos cuyo significado no puede usualmente ser evaluado por técnicas estadísticas convencionales, y son determinados por tanto subjetivamente.

Como la relación de proximidad no es necesariamente transitiva, debemos utilizar la teoría de las matrices inexactas en orden a formular una estructura de clausura transitiva que nos permitirá separar el conjunto de datos dentro de clusters mutuamente exclusivos que son, en esencia, equivalentes a las clases bajo cierto umbral.

Definición. Sea R una relación borrosa en el conjunto de datos D y sea r un subconjunto de D . Entonces se dice que R refina r si xRy implica que $x \in r$ si $y \in r$. Simbólicamente, $xRy \rightarrow (x \in r \Leftrightarrow y \in r)$.

Teorema. Sea $T_1 \geq T_2$. Entonces R_{T_1} refina R_{T_2} .

Es claro que si R_T es una relación umbral inducida por $\chi_g(x, y)$ y R'_T es una relación umbral inducida por $\chi'_g(x, y)$ y $\chi_g(x, y) \leq \chi'_g(x, y)$ para todo $x, y \in \Omega$, entonces R_T refina R'_T .

Si suponemos que para $x \neq y$ entonces $\bar{\chi}_g(x, y) \in [0, 1)$ y por tanto la función $\bar{\eta}_g(x, y) = 1 - \bar{\chi}_g(x, y)$ actúa como una función de distancia.

Teorema. Sea $x_1, \dots, x_n \in \Omega$ donde n es un número finito. Entonces $R_T = \psi(R_T^*) = (R_T^*)^{n-1}$ donde xR_T^*y si $\chi_g(x, y) \geq T$, y $R_T = \psi(R_T^*) = \text{Sup}_i (R_T^*)^i = \text{adj}(R_T^*)$.

Corolario. $R_T^* = \psi(R_T^*) \Leftrightarrow (R_T^*)^2 = R_T^*$.

Basado en el resultado anterior se presenta al algoritmo A para computar $\psi(R_T^*)$.

Algoritmo A. Dada la matriz R_T^* construida a partir de los patrones inexactos x_1, \dots, x_n . Generar la matriz $(R_T^*)^l = (R_T^*)^{l+1}$ para algún l , bajo la operación de multiplicación de matriz borrosa.

La matriz multiplicación repetida hace poco atractivo al algoritmo A desde el punto de vista de la eficiencia. El algoritmo B consigue el mismo resultado, y requiere sólo una ojeada singular sobre la matriz. De hecho, el algoritmo B trabaja correctamente en un rango más amplio de input, ya que no se requiere que los elementos de la diagonal de la matriz input sean 1 como el algoritmo A.

Algoritmo B.

1. Etiquetar los vértices de R_T^* por los enteros $1, \dots, n$.
2. Generar la matriz R_T^* .
3. DO $k = 1$ TO n .
4. DO $I = 1$ TO n .
5. IF $R_T^*(I, K) \neq 0$ THEN
6. DO $J=1$ to n :
7. $R_T^*(I, J) = \max(R_T^*(I, J), \min(R_T^*(I, K), R_T^*(K, J)))$
8. END
9. END
10. END.

Definición. Un grafo inexacto IG es un par $[V, S]$ donde V es un conjunto de datos vértices, y S es una relación de proximidad sobre V . Un vértice v_i se dice T -accesible desde otro vértice v_j para algún $0 < T \leq 1$, si y sólo si $\chi_s(v_i, v_j) \geq T$. IG se dice fuertemente T -conectado si y sólo si todo par de vértices es mutuamente accesible.

Un T -cluster en V es un subconjunto maximal U de V tal que cada par de elementos en U es mutuamente T -accesible. Por tanto la construcción de T -clusters de V no es sino construir todos los subgrafos maximales fuertemente T -conectados de IG .

Nota: La expresión «sii» significa «si y sólo si»

BIBLIOGRAFÍA

- GUPTA, Madan M. y SÁNCHEZ, Elie: *Fuzzy information decision processes*. 1982. North-Holland.
- KANDEL, Abraham: *Fuzzy Mathematical Techniques with Applications*. 1986. Addison-Wesley Publishing Company. Reading, Massachussets.
- KAUFMANN, A.: "Introduction à la théorie des sous-ensembles flous (Fuzzy sets theory)", Vol. III: *Application à la classification et à la reconnaissance des formes, aux automates et aux systèmes, aux choix des critères*. 1975. Masson et Cie., éditeurs. Paris.
- TRILLAS, Enrique: *Conjuntos borrosos*. Ed. Vicens-Vives S. A. 1980. Barcelona. 1^a edición.
- ZADEH, Lofti A., FU, King Sun, TANAKA, Kokichy, SHIMURA, Masamichi: *Fuzzy sets and their applications to cognitive decision processes*. 1975. Academic Press Inc. New York.

